PROCESO de ADMISIÓN 2023

Pruebas de Transición a la Admisión Universitaria

MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN MODELO

demre.cl

/demre.uchile

/demre_uchile

/DEMREuchile

/demre.uchile

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

DEMRE

PIONEROS • EXPERTOS • CONFIABLES

PREGUNTA 1

¿Cuál es el valor de $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$?

A) 0

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{119}{120}$

D) 1

E) $\frac{599}{120}$

Estrategia de resolución

Para determinar el valor de la expresión dada en el enunciado, puedes restar al número entero la fracción correspondiente en cada uno de los paréntesis, y luego simplificar las fracciones obtenidas, como se muestra a continuación:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\right)\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\right)\left(\frac{\cancel{4}}{5}\right)=\frac{1}{5}$$

La respuesta correcta es la opción B).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Al contestar esta pregunta debes saber, en primer lugar, operar con números racionales. Una vez realizado lo anterior, te puedes dar cuenta de que existe un patrón de simplificación, tal como se muestra en la estrategia de resolución anterior.

Así, para resolver este problema no contextualizado requieres de la capacidad para efectuar cálculos directos entre números.

PREGUNTA 2

¿Cuál es el valor de $1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$?

A) $\dfrac{1}{2}$

B) $\dfrac{9}{8}$

C) $\dfrac{1}{8}$

D) -7

E) -8

Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: transformar a potencia de exponente negativo.

Esta pregunta la puedes resolver escribiendo la fracción $\dfrac{1}{2}$ como una potencia de base 2 con exponente negativo para multiplicar los exponentes. Luego, realizas la sustracción, tal como se muestra en el siguiente desarrollo:

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 1 - \left(2^{-1}\right)^{-3} = 1 - 2^{3} = 1 - 8 = -7$$

La respuesta correcta es la opción D).

Estrategia 2: transformar a potencia de exponente positivo.

Para determinar el valor de la expresión planteada en la pregunta, puedes aplicar la propiedad de las potencias con exponente negativo, y luego realizar una operatoria entre las fracciones. Como se muestra a continuación:

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=1-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}=1-\frac{1}{\frac{1}{8}}=1-8=-7$$

La respuesta correcta es la opción D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

En primer lugar, necesitas conocer sobre potencias de base racional y exponente entero; además, saber operar con números enteros y fracciones. Para ello, se muestran dos estrategias para solucionar el problema.

Esta pregunta involucra una situación ploblemática rutinaria no contextualizada de potencias que requiere que realices cálculos directos entre números.

PREGUNTA 3

Todo el líquido contenido en un barril se reparte en 96 vasos iguales hasta su capacidad máxima.

Se quiere verter la misma cantidad de líquido de otro barril idéntico al anterior en vasos iguales a los usados, pero solo hasta las $\frac{3}{4}$ partes de su capacidad.

¿Cuántos vasos más se necesitarán para ello?

A) 288

B) 120

C) 48

D) 32

Algunas estrategias de resolución

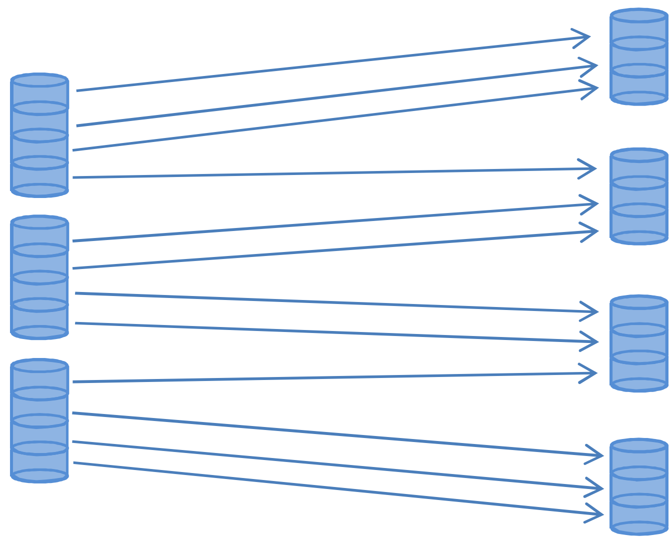
Estrategia 1: usar una ecuación.

Una forma que tienes para responder la pregunta es que partas de la premisa de que todo el líquido contenido en un barril lo puedes repartir en 96 vasos iguales hasta su capacidad máxima, pero ahora, debes determinar en cuántos vasos x con igual capacidad que los anteriores puedes repartir hasta las $\frac{3}{4}$ partes de su capacidad la misma cantidad de líquido. Para ello, puedes plantear la ecuación $\frac{3}{4} \cdot x = 96$, y despejando la incógnita obtienes que $x = 128$.

Como se pregunta cuántos vasos más se necesitan, tienes que hacer la diferencia entre la cantidad de vasos en que se repartirá el líquido hasta las $\frac{3}{4}$ partes de su capacidad y la cantidad de vasos llenados hasta su capacidad máxima, es decir, $128 - 96 = 32$. La respuesta correcta es la opción D).

Estrategia 2: usar esquemas.

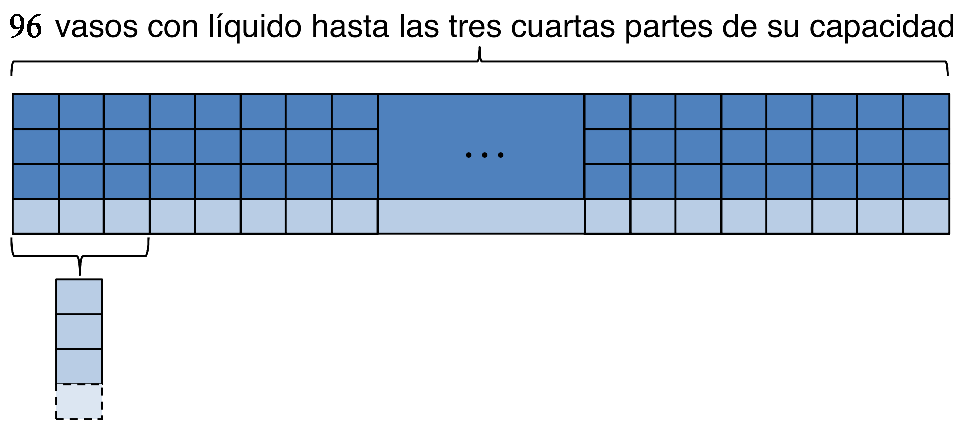
Otra manera que tienes para responder esta pregunta es ayudándote de un esquema como el siguiente. En él te puedes dar cuenta de que con el contenido de 3 vasos con líquido hasta su capacidad máxima puedes ocupar 4 de los mismos vasos hasta las $\frac{3}{4}$ partes de su capacidad.



Entonces, los 96 vasos con líquido hasta su capacidad máxima los puedes agrupar en 32 grupos de 3 vasos, y el líquido de cada uno de esos grupos se puede verter en 4 vasos hasta las $\frac{3}{4}$ partes de su capacidad máxima. En total se ocupan $32 \cdot 4 = 128$ vasos, por lo tanto, se necesitan $128 - 96 = 32$ vasos extra. La respuesta correcta es la opción D).

Estrategia 3: usar una tabla.

También puedes resolver este problema utilizando la siguiente representación:



Por cada 3 vasos se necesita un vaso extra para verter líquido hasta sus $\frac{3}{4}$ partes de capacidad, por lo que si son 96 vasos, se requieren $96:3 = 32$ vasos extras. La respuesta correcta es la opción D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Este problema lo puedes enfrentar de diversas maneras, por lo que cobra mucha importancia la capacidad para entender la situación problemática que se presenta en el enunciado. Podrías, por ejemplo, plantear una ecuación lineal que te permita determinar la cantidad de vasos que se te solicita, como se muestra en la primera estrategia.

Por otro lado, podrías usar diversas representaciones que te permitan entender el problema y la forma de redistribuir el contenido de los 96 vasos llenos en vasos hasta las tres cuartas partes de su capacidad. Luego, puedes realizar operaciones simples de números racionales, como se muestra en las dos últimas estrategias.

Para lo anterior, necesitas haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas y de Representar.

PREGUNTA 4

El precio de un artículo es $\$m$ y Pedro le entregó a la vendedora $\$(n + 200)$ para pagarlo.

¿Con cuál de las siguientes condiciones **NO** se puede asegurar que a Pedro le alcance para comprarlo?

A) $m < n + 200$

B) $m = n$

C) $m = n + 200$

D) $m \neq n + 200$

Estrategía de resolución

Para que a Pedro le alcance el dinero $\$(n + 200)$ entregado a la vendedora para pagar el precio total del artículo ($\$m$), se tiene que cumplir que $n + 200$ debe ser mayor o igual que m.

Teniendo esto en mente, al revisar las relaciones planteadas en las opciones de respuesta, se observa que con las condiciones dadas en A) y en C) se puede asegurar la relación $m \leq n + 200$, pero estás buscando la opción en la que esto no ocurre, por lo que puedes descartarlas.

En B) se tiene que $m = n$, y como Pedro le entregó a la vendedora $\$(n + 200)$, entonces le dio $\$200$ más de lo que cuesta el artículo. Con esto puedes concluir que con la condición dada en B) se puede asegurar la relación, por lo que tampoco es la opción correcta.

Por último, en D) se indica que $m \neq n + 200$, de lo que se infiere que m podría ser mayor o menor que $n + 200$, por lo que no se puede asegurar que a Pedro le alcanza para comprar el artículo. Luego, la opción correcta es D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

La resolución de este problema requiere, en primer lugar, que establezcas la relación que se debe dar entre las expresiones presentadas en el enunciado. Luego, a partir de estas, debes analizar las opciones y determinar la condición que no permite asegurar que el dinero que Pedro le entregó a la vendedora le alcance para comprar el artículo.

Para lo anterior, necesitas haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas y de Representar.

PREGUNTA 5

Una caja vacía tiene una masa de $375\,\text{g}$. Luego se le agregan 6 paquetes de $\frac{3}{4}\,\text{kg}$ cada uno y 4 paquetes de $1\frac{1}{4}\,\text{kg}$ cada uno.

¿Cuál es la masa total de la caja con estos paquetes?

A) $9\frac{7}{8}\,\text{kg}$

B) $9\frac{1}{2}\,\text{kg}$

C) $6\frac{1}{8}\,\text{kg}$

D) $2\frac{5}{8}\,\text{kg}$

E) $2\frac{3}{8}\,\text{kg}$

Estrategia de resolución

Una forma de contestar esta pregunta es mediante el uso de una tabla, de tal manera que recopiles todos los datos dados, en kilogramos, en el enunciado. En ella puedes llamar P a los paquetes de $\frac{3}{4}\,\text{kg}$ y Q a los paquetes de $1\frac{1}{4}\,\text{kg}$, como se muestra a continuación:

Objetos	Masa en kilogramos	Cantidad	Masa total en kilogramos
Caja vacía	$375\ \text{g} = \frac{3}{8}\ \text{kg}$	1	$\frac{3}{8}\cdot 1 = \frac{3}{8}$
Paquete P	$\frac{3}{4}\ \text{kg}$	6	$\frac{3}{4}\cdot 6 = \frac{18}{4}$
Paquete Q	$1\frac{1}{4}\ \text{kg}$	4	$1\frac{1}{4}\cdot 4 = \frac{5}{4}\cdot 4 = 5$

De la tabla, puedes deducir que la masa total de la caja con estos paquetes es:

$$\frac{3}{8}+\frac{18}{4}+5=\frac{3}{8}+\frac{36}{8}+5=\frac{39}{8}+5=4\frac{7}{8}+5=9\frac{7}{8}$$

Luego, la masa total es $9\frac{7}{8}\ \mathrm{kg}$.

La respuesta correcta, entonces, es la opción A).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

En este problema debes relacionar las variables involucradas en la situación, es decir, la masa de la caja con la de los dos tipos de paquetes que se agregan a ella. Esto puede realizarse a través de una tabla como la que aparece en la estrategia de resolución.

Posteriormente, para obtener la masa total de la caja con los paquetes debes sumar las masas respectivas, teniendo presente que para efectuar esta adición, todos los valores deben estar en una misma unidad de medida.

Así, para responder esta pregunta, necesitas haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas y de Representar.

PREGUNTA 6

¿Cuál de las siguientes cantidades corresponde al $5\,\%$ del precio de un artículo?

A) Un quinto del precio del artículo.
B) El precio del artículo multiplicado por cinco décimos.
C) El precio del artículo dividido por 100, y luego multiplicado por 5.
D) El precio del artículo dividido por 5, y luego multiplicado por 100.

Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: usar un ejemplo.

Para resolver este problema puedes calcular el $5\,\%$ del precio de un artículo, para luego analizar qué tuviste que hacer.

Para ello, puedes ayudarte con un ejemplo. Supón que el artículo cuesta $\$8.000$ y anótalo en una tabla:

Precio	Porcentaje
8.000	100
x	5

A continuación, planteas la igualdad $\frac{8.000}{x} = \frac{100}{5}$. Si despejas la incógnita, obtienes $x = \frac{5 \cdot 8.000}{100}$.

Si analizas esta igualdad, puedes concluir que para calcular el $5\,\%$ del precio de un artículo, tienes que dividir dicho valor por 100, y luego multiplicar el resultado por 5.

La respuesta correcta es la opción C).

Estrategia 2: usar el centésimo de 1.

Otra manera de resolver este problema es comprender que el $1\ \%$ del precio de un artículo es un centésimo de este, mientras que el $5\ \%$ es 5 veces el $1\ \%$.

Así, para determinar el $5\ \%$ del precio del artículo, primero hay que calcular el $1\ \%$ de este dividiéndolo por 100, y luego multiplicar el resultado por 5.

La respuesta correcta es la opción C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Al responder esta pregunta debes recordar cómo determinar el porcentaje de un número. Luego tienes que relacionar el porcentaje planteado en la pregunta con lo expresado en las opciones. Para esto, puedes utilizar más de una estrategia, por ejemplo, calcular el porcentaje en un caso particular, lo que te permite visualizar la operatoria involucrada, como en la Estrategia 1.

También, puedes relacionar el porcentaje pedido, el 5 %, con el 1 %, para luego escribirlo en una expresión como se hizo en la Estrategia 2.

Para lo anterior, necesitas haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas y de Representar.

PREGUNTA 7

Un número aumentado en su $30\ \%$ es igual a 910.

¿Cuál es el número?

A) 273
B) 637
C) 700
D) 1.183

Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: usar una tabla.

Para responder, debes determinar de qué número 910 es el $130\ \%$, ya que el número aumentado en su $30\ \%$ equivale al $130\ \%$ de este. Para ello, puedes apoyarte en la siguiente tabla:

Número	Porcentaje
910	130
x	100

A continuación, podrías plantear la ecuación $\frac{910}{x} = \frac{130}{100}$. Si despejas la incógnita, obtienes $x = 700$.

La respuesta correcta es la opción C).

Estrategia 2: usar una ecuación.

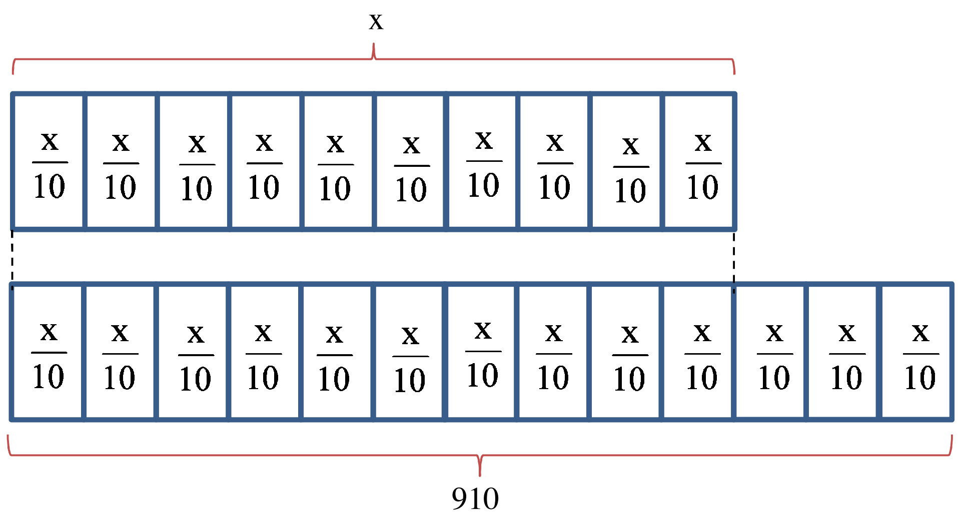
Otra manera de resolver este problema, es representar el enunciado a través de una expresión matemática considerando que x es el número buscado, o sea, $x + \frac{30}{100}x = 910$.

Si resuelves la ecuación anterior, obtienes que $x = 700$.

La respuesta correcta es la opción C).

Estrategia 3: usar un esquema.

También, puedes utilizar el siguiente esquema, considerando que x es el número buscado y $\frac{x}{10}$ es su $10\ \%$.



De donde $910 = \frac{13x}{10}$. Si resuelves la ecuación, obtienes que $x = 700$.

La respuesta correcta es la opción C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responder correctamente debes saber identificar qué porcentaje es el que está asociado al número 910 y tener claro lo que se está preguntando. Además, requieres saber calcular el porcentaje de un número.

Junto con lo anterior, debes relacionar el número 910 con el porcentaje respectivo, para lo cual necesitas entender que si un número se aumenta en un porcentaje de él, se tiene que el nuevo número coresponde al 100 % más ese porcentaje de aumento. Esto fue lo utilizado en la Estrategia 1 de resolución.

Por otra parte, puedes resolver el problema representándolo a través de una ecuación, como en la Estrategia 2, o un esquema que permita entender la situación planteada (Estrategia 3).

Para lo anterior, necesitas haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas y de Representar.

PREGUNTA 8

¿Cuál es el resultado de $\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{18}$?

A) $\sqrt{2}$

B) $2\sqrt{2}$

C) $\sqrt{12}$

D) $6\sqrt{2}$

E) $2\sqrt{6}$

Estrategia de resolución

Esta pregunta la puedes responder de la siguiente manera:

$$\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{2} - \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

Finalmente, al sumar los términos semejantes, obtienes $2\sqrt{2}$.

La respuesta correcta es la opción B).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Como te habrás dado cuenta, lo que necesitas saber para responder esta pregunta es cómo descomponer las raíces para expresarlas todas con igual cantidad subradical. De esta manera puedes sumarlas, tal como se muestra en la resolución.

Entonces, en este problema no contextualizado requieres operar de forma rutinaria con raíces.

PREGUNTA 9

Si $\log_{m}\left(\frac{8}{125}\right) = -3$, ¿cuál es el valor de m?

A) $-\frac{2}{5}$

B) $\left(\frac{8}{125}\right)^{-3}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{5}{2}$

Estrategia de resolución

Para contestar la pregunta, puedes aplicar la definición de logarítmo a la igualdad dada en el enunciado, $\log_{m}\left(\frac{8}{125}\right) = -3$, obteniendo $m^{-3} = \frac{8}{125}$.

A partir de lo anterior, para determinar el valor de m, tienes que igualar el exponente en ambos lados de la igualdad, tal como se muestra en el siguiente desarrollo:

$$m^{-3} = \frac{8}{125}$$

$$\left(\frac{1}{m}\right)^{3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{3}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{2}{5}$$

$$m = \frac{5}{2}$$

La respuesta correcta es la opción D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responder correctamente, debes saber relacionar los logaritmos con las potencias, y luego emplear las propiedades de las potencias que te permitan igualar los exponentes de los términos pertenecientes a la igualdad. Esto lleva a la resolución de una ecuación simple.

En este sentido, para resolver este problema no contextualizado requieres relacionar conocimientos y efectuar cálculos sencillos.

PREGUNTA 10

Las distancias de un planeta a dos satélites naturales son 380.000 km y 420.000 km.

Considera que la velocidad de la luz es $c = 300.000.000 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ y que $c = \dfrac{\text{distancia}}{\text{tiempo que demora la luz en recorrer dicha distancia}}$.

¿Cuál de los siguientes valores corresponde a la diferencia entre los tiempos, en s, que demora la luz en llegar desde cada uno de los satélites al planeta?

A) $3 \cdot 10 \cdot (42 - 38)$

B) $\dfrac{1}{3} \cdot 10^{-1} \cdot (42 - 38)$

C) $3 \cdot 10^{12} \cdot (42 - 38)$

D) $10^{4} \cdot (42 - 38)$

Estrategia de resolución

Para resolver este problema, tienes que usar la fórmula $c = \dfrac{d}{t}$ y así calcular el tiempo, en segundos, que tardará la luz desde cada uno de los satélites al planeta. Luego, debes calcular la diferencia entre estos tiempos.

Primero tienes que despejar t de la fórmula anterior, obteniendo la igualdad $t = \dfrac{d}{c}$.

Luego, puedes construir una tabla con los datos dados en el enunciado y los que se obtienen a partir de estos, escribiendo las medidas como el producto de un número racional por una potencia de 10. Esto se muestra a continuación:

	Satélite 1	Satélite 2
Distancia al planeta en kilómetros	$380.000 = 38 \cdot 10^4$	$420.000 = 42 \cdot 10^4$
Distancia al planeta en metros	$38 \cdot 10^4 \cdot 10^3 = 38 \cdot 10^7$	$42 \cdot 10^4 \cdot 10^3 = 42 \cdot 10^7$
Tiempo que demora la luz en llegar al planeta	$\frac{d}{c} = \frac{38 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = \frac{38}{3} \cdot 10^{-1}$	$\frac{d}{c} = \frac{42 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} = \frac{42}{3} \cdot 10^{-1}$

Con los datos de la tabla obtienes que la diferencia entre los tiempos que demorará la luz de cada satélite en llegar al planeta es:

$$\frac{42}{3} \cdot 10^{-1} - \frac{38}{3} \cdot 10^{-1} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-1} \cdot (42 - 38)$$

La respuesta correcta es la opción B).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

En primer lugar, debes escribir las cantidades usando potencias de base 10 y en una misma unidad de medida. En segundo lugar, reordenar el modelo dado para determinar la velocidad de la luz, de manera que puedas usarlo de la forma más apropiada para calcular el tiempo que tarda la luz en llegar desde cada satélite al planeta.

Sumado a lo anterior, en la determinación de la respuesta requieres haber observado las opciones para visualizar la estructura que tienen los valores planteados en ellas.

Por último, necesitas haber desarrollado la habilidad de Resolver problemas y de Modelar.

PREGUNTA 11

Al ingresar n instrucciones a un programa computacional, este realiza cálculos durante 3^{n} segundos. Cuando se ingresan 9 instrucciones en el programa computacional, este realiza cálculos durante M segundos.

Si el programa hizo cálculos durante $3\mathrm{M}$ segundos, ¿cuántas instrucciones se ingresaron al programa?

A) 10
B) 27
C) n
D) $3\mathrm{n}$

Estrategia de resolución

Para responder esta pregunta, debes interpretar los datos del enunciado y relacionar la cantidad de instrucciones que se ingresan en el computador con el tiempo que demora por cada una de esas instrucciones.

Así, si ingresas n instrucciones al programa computacional, este efectúa cálculos durante 3^{n} segundos, por lo tanto, si ingresas 9 instrucciones en el programa computacional, este hace cálculos durante 3^9 segundos.

Además, en el enunciado se dice que al ingresar 9 instrucciones en el programa computacional, este realiza cálculos durante M segundos, por lo que $\mathrm{M} = 3^9$.

Por otro lado, si el programa efectuó cálculos durante $3\mathrm{M}$ segundos, puedes escribir la igualdad $3\mathrm{M} = 3 \cdot 3^9$. Luego, al aplicar la propiedad de la multiplicación de potencias con igual base, obtienes $3\mathrm{M} = 3^{10}$, de lo que puedes deducir que se ingresaron 10 instrucciones al programa computacional.

La respuesta correcta es la opción A).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para resolver este problema, es fundamental la interpretación de los datos dados en el enunciado y del modelo que permite saber el tiempo que el programa computacional se demora en realizar cálculos según la cantidad de instrucciones ingresadas. Además, debes relacionar dichos datos a través del modelo presentado y aplicar las propiedades de las potencias.

Para lo anterior, debes saber usar e interpretar modelos matemáticos.

PREGUNTA 12

El radio de un átomo de cierto elemento es $x \cdot 10^n$ metros, mientras que el radio de un átomo de otro elemento es $y \cdot 10^m$ metros.

Se puede determinar qué átomo tiene mayor radio si se sabe que:

(1) los radios están escritos en notación científica, con $x > y$.

(2) $n > m$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Estrategia de resolución

Para resolver este problema, debes comparar los radios de los átomos usando las condiciones dadas en (1) y/o en (2).

Así, si consideras solo la información dada en (1), tienes que las potencias están en notación científica, lo que quiere decir que x e y son números reales menores que 10 y mayores que 1, y que $x > y$, pero no se puede determinar nada respecto a los exponentes de las potencias, por lo tanto, no puedes establecer qué radio es mayor.

Si solo consideras la información dada en (2), tienes que $n > m$, pero nada se sabe de x e y, por lo tanto, no puedes saber qué radio es mayor.

Si juntas la información dada en (1) y en (2), puedes determinar que $x \cdot 10^n$ metros $>$ $y \cdot 10^m$ metros, porque $x > y$ y $n > m$.

Luego, con ambas informaciones determinas qué radio es mayor.

La opción correcta es la C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Este problema pone de manifiesto tu capacidad para analizar los datos y reconocer si la relación de orden entre las medidas de los radios de los átomos se puede determinar a partir de las informaciones dadas en (1) y (2).

En este caso particular, debes conocer la forma en que se representan los números a través de una expresión escrita en notación científica.

Las habilidades que debieses haber desarrollado son Representar y Argumentar.

PREGUNTA 13

¿Cuál de las siguientes expresiones es igual a $x^9 + x^6 + x^3$?

A) x^{18}

B) $3x^{18}$

C) $x^3\left(x^6 + x^3 + x^0\right)$

D) $x^3\left(x^3 + x^2 + x^1\right)$

Estrategia de resolución

Puedes responder esta pregunta utilizando factorización de expresiones algebraicas y para ello debes recordar la propiedad del producto de potencias de igual base, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} x^9 + x^6 + x^3 &= x^{3+6} + x^{3+3} + x^3 \\ &= x^3 \cdot x^6 + x^3 \cdot x^3 + x^3 \cdot 1 \\ &= x^3 \cdot x^6 + x^3 \cdot x^3 + x^3 \cdot x^0 \\ &= x^3\left(x^6 + x^3 + x^0\right) \end{aligned}$$

La respuesta correcta es la opción C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

En esta pregunta debes aplicar la factorización de expresiones algebraicas, pero previo a eso debes descomponer cada término algebraico aplicando la propiedad del producto de potencias de igual base, como se muestra en el desarrollo antes descrito.

De esta manera, en este problema requieres aplicar conocimientos de álgebra para representar la expresión algebraica dada en la pregunta a través de otra expresión equivalente a ella.

PREGUNTA 14

¿Cuál de las siguientes expresiones es igual a $m^2 - a^2 + 6a - 9 + (3 - a)^2$?

A) m^2

B) $m^2 + 12a$

C) $m^2 + 6a$

D) $m^2 - 2(a - 3)^2$

E) $m^2 - 2a^2 + 6a$

Estrategias de resolución

Estrategia 1: usar el desarrollo de binomio al cuadrado.

Para resolver este ejercicio debes desarrollar un binomio al cuadrado, y luego reducir términos semejantes, como lo puedes ver a continuación:

$$m^2 - a^2 + 6a - 9 + (3 - a)^2 = m^2 - \cancel{a^2} + \cancel{6a} - \cancel{9} + \cancel{9} - \cancel{6a} + \cancel{a^2} = m^2$$

La respuesta correcta es la opción A).

Estrategia 2: usar factorización.

Otra manera de resolver este problema es darte cuenta que en la expresión $m^2 - a^2 + 6a - 9 + (3 - a)^2$ los términos $-a^2 + 6a - 9$ forman un cuadrado de binomio. Así, tienes $-a^2 + 6a - 9 = -(a-3)^2$.

Luego, considerando que $(a - 3)^2 = (3 - a)^2$ obtienes que:

$$m^2 - a^2 + 6a - 9 + (3 - a)^2 = m^2 - \cancel{(a - 3)^2} + \cancel{(3 - a)^2} = m^2$$

La respuesta correcta es la opción A).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Lo que necesitas para responder esta pregunta es saber desarrollar productos notables y operatoria con expresiones algebraicas, como se hizo en la Estrategia 1, o factorizar y aplicar reducción de términos semejantes, como se hizo en la Estrategia 2.

Para resolver este problema requieres aplicar conocimientos de álgebra para representar la expresión algebraica dada en la pregunta a través de otra expresión equivalente a ella.

PREGUNTA 15

Si para todo número real x se cumple que $(x + p)(x - q) = x^2 - 8x + r$, con p, q y r números enteros y $r > 0$, ¿cuál(es) de las siguientes relaciones es (son) verdadera(s)?

I) $p \neq q$

II) $p < q$

III) $p \cdot q < 0$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

Estrategia de resolución

Este problema debes abordarlo analizando cada una de las relaciones dadas en I), en II) y en III) y así, determinar cuál o cuáles de ellas son verdaderas.

Para ello, puedes desarrollar el lado izquierdo de la igualdad dada en el enunciado, ya sea aplicando productos notables o desarrollando la multiplicación de binomios, para comparar los coeficientes de los términos semejantes, como se muestra a continuación:

$$(x + p)(x - q) = x^2 + (p - q)x - p \cdot q = x^2 - 8x + r$$

De esta igualdad se concluye que $p - q = -8$ y que $-p \cdot q = r$.

Luego, de la igualdad $p - q = -8$ tienes que $p \neq q$, ya que si fueran iguales se debiera cumplir que $p - q = 0$. Entonces, la relación dada en I) es verdadera.

También puedes concluir que $p < q$, pues de la igualdad $p - q = -8$ obtienes que $p + 8 = q$. Entonces, la relación en II) es verdadera.

Por último, tienes que $-p \cdot q = r$, y como $r > 0$, puedes concluir que $p \cdot q < 0$. Entonces la relación dada en III) también es verdadera.

Por el análisis realizado, la respuesta correcta es la opción E).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Este es un problema en el que tienes que relacionar la información que se entrega en el enunciado con cada una de las informaciones dadas para así determinar su veracidad.

En este caso en particular, debes utilizar la operatoria algebraica (producto de binomios) para relacionar los términos y variables de ambos lados de la igualdad dada en el enunciado considerando las propiedades de los números enteros.

En síntesis, para responder esta pregunta, junto al análisis de las relaciones que se establecen, debes aplicar tus conocimientos sobre los números y el álgebra.

PREGUNTA 16

En un libro de álgebra se plantea la siguiente situación:

"José y Maricel comparten un paquete de galletas. José saca $\frac{2a - 1}{2}$ galletas del paquete y Maricel $2(b - 1)$".

¿Cuál de las siguientes expresiones representa la cantidad total de galletas que estas dos personas sacaron del paquete?

A) $a + 2b - \frac{5}{2}$

B) $a + 2b - 3$

C) $a - 2b - \frac{3}{2}$

D) $a + 2b - 2$

Estrategia de resolución

En el problema se plantea que José saca $\frac{2a - 1}{2}$ galletas del paquete y Maricel, $2(b - 1)$. En total, entre ambos sacaron $\frac{2a - 1}{2} + 2(b - 1)$ galletas.

Al resolver esta suma se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{2a - 1}{2} + 2(b - 1) &= \frac{2a - 1 + 4(b - 1)}{2} \\
&= \frac{2a - 1 + 4b - 4}{2} \\
&= \frac{2a + 4b - 5}{2} \\
&= a + 2b - \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

La respuesta correcta es la opción A).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para resolver este problema debes encontrar la expresión que representa la cantidad total de galletas extraídas del paquete por José y Maricel. Para ello, en primer lugar, tienes que interpretar la información dada en el enunciado, lo cual te llevará a que necesitas sumar las expresiones que representan la cantidad extraída por cada persona del paquete y así obtener lo solicitado.

Para esto, debes aplicar la operatoria entre expresiones algebraicas. En este caso, multiplicar un monomio por un binomio y reducir términos semejantes.

PREGUNTA 17

¿Cuál es el valor de x en la ecuación $0{,}3 + 10x = 0{,}5$?

A) 8
B) 2
C) $0{,}08$
D) $0{,}02$

Estrategia de resolución

Para encontrar el valor de x en la ecuación planteada, puedes hacer el siguiente desarrollo:

$$0{,}3 + 10x = 0{,}5$$

Si sumas $-0{,}3$ a ambos lados de la igualdad.

$$10x = 0{,}2$$

Si divides por 10 ambos lados de la igualdad.

$$x = 0{,}02$$

La respuesta correcta es la opción D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responderla, debes saber resolver una ecuación de primer grado con coeficientes racionales. Para encontrar el valor de la incógnita, requieres operar con números decimales.

Este problema plantea una situación rutinaria, en la que debes realizar cálculos numéricos directos y aplicar los conocimientos necesarios para la resolución de ecuaciones lineales. Esta pregunta requiere, entonces, haber desarrollado la habilidad de Resolver problemas.

PREGUNTA 18

Valentina y Ricardo tienen la misma cantidad de dinero. Valentina compró 7 chocolates y le sobraron $\$350$. Ricardo, por su parte, compró 5 chocolates y le sobraron $\$600$. El precio de cada chocolate comprado por ellos es el mismo.

¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene como solución el precio $(\$x)$ de un chocolate?

A) $7x + 350 = 5x + 600$

B) $7x + 5x = 350 + 600$

C) $7x - 350 = 5x - 600$

D) $7(x + 350) = 5(x + 600)$

Estrategia de resolución

Como te puedes dar cuenta, el dinero que tienen Valentina y Ricardo es el mismo y el precio de los chocolates que compran también es el mismo, por lo que puedes plantear una ecuación de primer grado para que puedas determinar el precio x, que sería el valor de un chocolate.

Se sabe que Valentina compró 7 chocolates y le sobraron $\$350$, entonces puedes expresar la cantidad de dinero de Valentina como $7x + 350$. Por otro lado, se sabe que Ricardo compró 5 chocolates y le sobrraron $\$600$, entonces puedes expresar la cantidad de dinero de Ricardo como $5x + 600$.

Como tienes que calcular el precio x de un chocolate, puedes hacerlo a través de la ecuación $7x + 350 = 5x + 600$.

La respuesta correcta, entonces, es la opción A).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responderla, debes entender e interpretar la situación problemática planteada, de manera que al relacionar los elementos que se entregan en el enunciado puedas escribir una ecuación de primer grado que te permita encontrar el precio de cada chocolate.

Para obtener la ecuación solicitada, tienes que encontrar la expresión que representa el dinero que posee cada una de las personas involucradas en el problema en términos del precio de los chocolates comprados, para luego igualar dichas expresiones, ya que ambas personas tienen la misma cantidad de dinero.

Para lo anterior, debes haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas, de Modelar y de Representar.

PREGUNTA 19

Un bidón tiene ocupada con gasolina la mitad de su capacidad máxima. Al agregar 8 L de gasolina, se llega a las $\frac{5}{6}$ partes de su capacidad.

¿Cuál es la capacidad máxima del bidón?

A) 10 L

B) 12 L

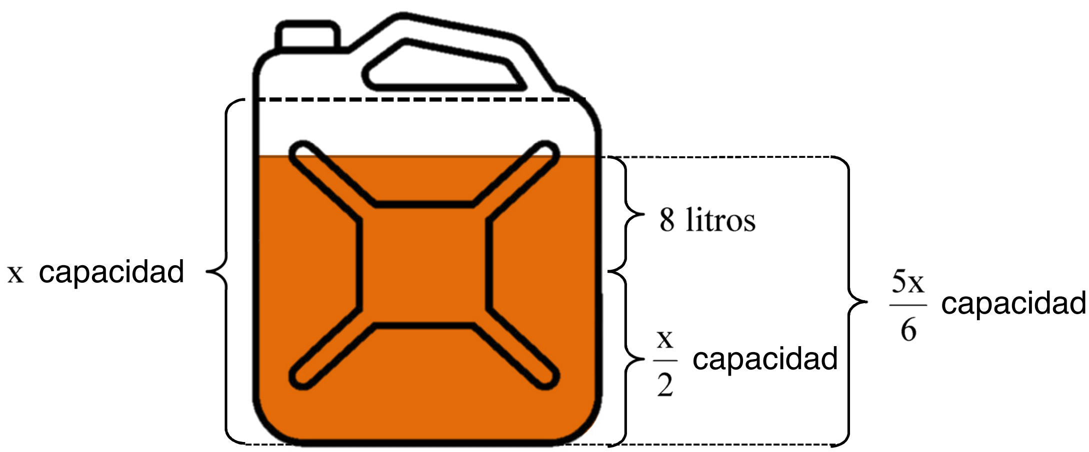
C) 20 L

D) 24 L

E) 48 L

Estrategia de resolución

Una forma que tienes de responder la pregunta es representar gráficamente la situación, como se muestra a continuación, considerando que x es la capacidad máxima del bidón.



De la representación anterior puedes plantear la ecuación $\frac{x}{2} + 8 = \frac{5x}{6}$. Al despejar la incógnita, tienes que x es 24 L.

La respuesta correcta es la opción D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para resolver este problema y determinar la capacidad máxima del bidón, debes relacionar los datos dados en el enunciado con lo solicitado en la pregunta. En este caso, la relación se da a través del planteamiento de una ecuación de primer grado.

Una forma que tienes de relacionar las capacidades del bidón en distintos momentos es a través de una representación. Esta te permite establecer las expresiones que son iguales y así plantear la ecuación. Por su parte, la resolución de la ecuación solo requiere de operatoria básica en el conjunto de los números racionales.

Para esta resolución debes haber desarrollado la habilidad de Resolver problemas y la habilidad de Representar.

PREGUNTA 20

Una escuela de teatro infantil cobra $\$25.000$ por matrícula, más $\$13.000$ por cada mes de clases.

Una familia cuenta con un presupuesto total de $\$140.000$ para que su hija tome clases en esa escuela.

¿Cuál es la cantidad máxima de meses que puede pagar?

A) 3 meses

B) 4 meses

C) 8 meses

D) 9 meses

Estrategias de resolución

Estrategia 1: usar una ecuación lineal.

En esta pregunta debes determinar la cantidad máxima de meses de clases de teatro que puede pagar una familia que tiene un presupuesto de $\$140.000$. Para esto, puedes asignar x a la cantidad de meses, y luego plantear la siguiente ecuación:

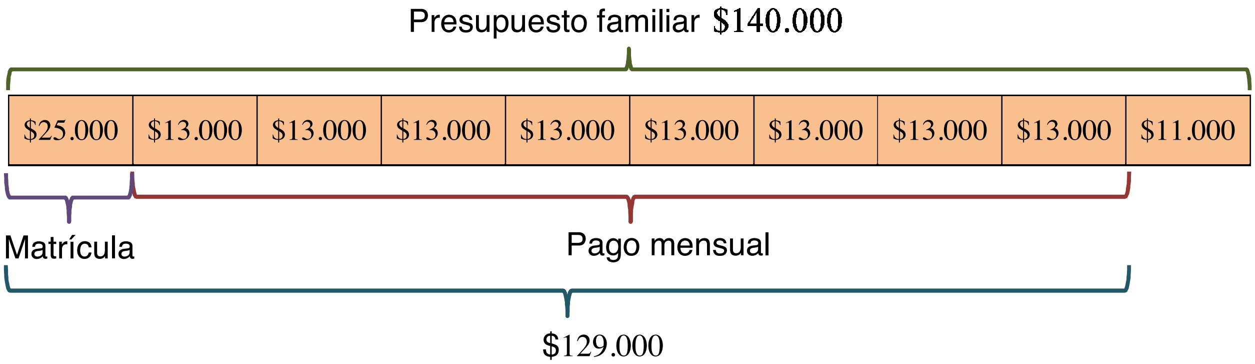
$$\underbrace{\boxed{140.000}}_{\text{Presupuesto}} = \overbrace{\boxed{13.000}}^{\text{Valor mensual}}x + \underbrace{\boxed{25.000}}_{\text{Matrícula}}$$

Al resolver esta ecuación, obtienes que $x = \frac{115}{13}$, valor que no es un número entero y que aproximadamente es $8{,}8$. Pero como se pide cuál es la cantidad máxima de meses que puede pagar la familia, esta corresponde a 8 meses.

La respuesta correcta, entonces, es la opción C).

Estrategia 2: usar un esquema.

También puedes utilizar el siguiente esquema para calcular la cantidad máxima de meses que puede pagar una familia que tiene un presupuesto de $\$140.000$.



De esta manera, puedes ver que se pueden pagar 8 mensualidades.

La respuesta correcta es la opción C).

Estrategia 3: usar operaciones con números racionales.

Para resolver el problema, también podrías usar el siguiente razonamiento:

Como la familia tiene un presupuesto de $\$140.000$ para pagar el taller y es obligación pagar matrícula, para conocer, entonces, la cantidad de meses que se pueden cubrir con este presupuesto, debes restar al presupuesto el monto de la matrícula.

$$\$140.000 - \$25.000 = \$115.000$$

Así, el monto disponible para pagar las mensualidades es $\$115.000$. Como cada mensualidad es de $\$13.000$, para conocer cuántas mensualidades se pueden pagar, debes dividir el monto disponible por el valor de cada mensualidad:

$$\frac{\$115.000}{\$13.000} \approx 8{,}8$$

Por lo tanto, se pueden pagar 8 mensualidades completas.

La respuesta correcta es la opción C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para resolver este problema, primero debes identificar cuál es la información que se presenta en el enunciado, y luego organizarla.

A partir de eso, puedes utilizar ecuaciones, representaciones u otro razonamiento para encontrar la cantidad de meses que se pueden pagar con su presupuesto total. Sea cual sea tu estrategia, deberás tener conocimientos sobre la operatoria con números racionales.

Además, deberías haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas, de Modelar y de Representar.

PREGUNTA 21

Dos hermanos quieren saltar juntos en una cama elástica que puede resistir como máximo $100\ \mathrm{kg}$. La diferencia entre las masas de los dos hermanos es de $30\ \mathrm{kg}$.

¿Cuál es la masa máxima que puede tener el hermano de menor masa para que la cama elástica los resista a los dos?

A) $65\ \mathrm{kg}$

B) $35\ \mathrm{kg}$

C) $34\ \mathrm{kg}$

D) $30\ \mathrm{kg}$

Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: usar una inecuación.

Una manera que tienes para determinar cuál es la masa máxima que puede tener el hermano de menor masa para que resista la cama elástica es plantear y resolver una inecuación.

Para esto, debes interpretar los datos del enunciado y puedes designar la variable y como la masa del hermano de menor masa. De esta manera, la expresión que representa la masa del hermano mayor es $30 + y$, pues la diferencia entre las masas de los dos hermanos es de $30\ \mathrm{kg}$.

Ahora, como se sabe que la cama elástica resiste como máximo $100\ \mathrm{kg}$, entonces tienes que la suma de las masas de los dos hermanos debe ser menor o igual a $100\ \mathrm{kg}$, lo cual se expresa por:

$$(30 + y) + y \leq 100$$

Al resolver la inecuación, obtienes que

$$\begin{aligned} (30 + y) + y &\leq 100 \\ 30 + 2y &\leq 100 \\ 2y &\leq 70 \\ y &\leq 35 \end{aligned}$$

Por lo tanto, como máximo la masa del hermano de menor masa puede ser de 35 kg.

La respuesta correcta, entonces, es la opción B).

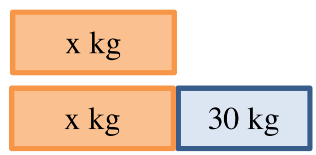
Estrategia 2: usar un esquema.

Otra forma de responder la pregunta es apoyándote en un esquema.

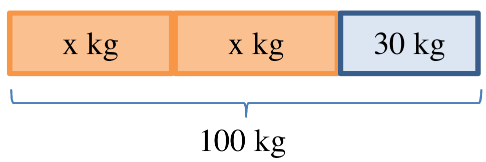
La pregunta plantea que la diferencia entre las masas de ambos hermanos es 30 kg, esto quiere decir que un hermano tiene 30 kg más de masa que el otro. Dicha relación se puede representar como se muestra a continuación:

Masa de hermano con menor masa:

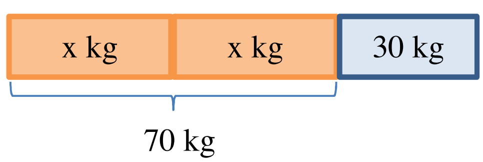
Masa de hermano con mayor masa:



Ahora, para saber cuál es el máximo valor que puede tomar x, debes considerar que como máximo la suma de ambas masas debe ser 100 kg, es decir,



Así, restándole 30 kg a 100 kg puedes concluir que



Finalmente, como dos veces $x \text{ kg}$ es 70 kg, una vez $x \text{ kg}$ es 35 kg. Por lo tanto, el hermano de menor masa debe tener como máximo una masa de 35 kg.

La respuesta correcta es la opción B).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responderla correctamente, necesitas reconocer la relación entre las masas de ambos hermanos, y entre estas con la capacidad máxima de resistencia de la cama elástica. Con esta información puedes plantear una inecuación lineal, y luego de resolverla, obtener la masa del hermano de menor masa, como se realizó en la Estrategia 1.

Una representación siempre ayuda a entender la situación problemática, por lo que, en este caso, te puedes apoyar de una esquema, como se hizo en la Estrategia 2. En el esquema comparas directamente las masas de los hermanos y la que resiste como máximo la cama elástica para a partir de ello aplicar una operatoria básica entre números enteros y determinar lo pedido.

Para ambas estrategias, tienes que haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas y Representar.

PREGUNTA 22

La nutricionista le recomendó a una persona que en su alimentación diaria consumiera no más de $2.000\,\mathrm{Kcal}$ y no menos de $1.800\,\mathrm{Kcal}$. Durante la jornada ella ha consumido $1.400\,\mathrm{Kcal}$ y como última comida ingerirá galletas.

En su despensa tiene dos tipos de galletas, cuya información nutricional aparece en sus envases de la siguiente forma:

TIPO 1

INFORMACIÓN NUTRICIONAL		
Porción: 4 unidades (40 g) **Porciones por envase**: 4		
	100 g	1 porción
Energía Kcal	500	200

TIPO 2

INFORMACIÓN NUTRICIONAL		
Porción: 5 unidades (25 g) **Porciones por envase**: 7		
	100 g	1 porción
Energía Kcal	600	150

¿Cuál de las siguientes opciones le permite a esta persona cumplir con la dieta?

A) Comer un mínimo de 3 galletas y un máximo de 4 del tipo 2.

B) Comer 3 galletas del tipo 1 y 1 del tipo 2.

C) Comer 2 galletas del tipo 1 y 4 del tipo 2.

D) Comer un mínimo de 8 galletas y un máximo de 12 del tipo 1.

Estrategia de resolución

Una manera de resolver este problema es, primero, identificar cuántas Kcal le faltan a la persona para completar tanto el mínimo como el máximo para cumplir con la dieta recomendada.

Ella no debiese consumir más de $2.000\,\text{Kcal}$ ni menos de $1.800\,\text{Kcal}$ en un día, es decir, $1.800 \leq \text{Kcal diarias} \leq 2.000$. Pero como ya ha consumido $1.400\,\text{Kcal}$ le falta un rango de $400 \leq \text{Kcal diarias} \leq 600$ en galletas para cumplir la dieta.

Entonces, debes interpretar la información nutriconal de los envases de galletas de Tipo 1 y del Tipo 2 que se presenta en las tablas.

- De la primera se tiene que la porción, conformada por 4 galletas del Tipo 1, aporta $200\,\text{Kcal}$, por lo que cada galleta corresponde a $50\,\text{Kcal}$.

- De la segunda, conformada por 5 galletas del Tipo 2, se tiene que la porción aporta $150\,\text{Kcal}$. Así obtienes que cada galleta es de $30\,\text{Kcal}$.

Al revisar las opciones, tienes que en A) se menciona que se puede *comer un mínimo de 3 galletas y un máximo de 4 del Tipo 2*. Esto es falso, porque la persona consumiría entre $3 \cdot 30 = 90\,\text{Kcal}$ y $4 \cdot 30 = 120\,\text{Kcal}$, pero ella necesita un mínimo de $400\,\text{Kcal}$.

La opción B) menciona que se puede *comer 3 galletas del Tipo 1 y 1 del Tipo 2*, lo que es falso, porque la persona en este caso consumiría $3 \cdot 50 + 30 = 180\,\text{Kcal}$ y ella requiere un mínimo de $400\,\text{Kcal}$.

La ocpión C) menciona que se puede *comer 2 galletas del Tipo 1 y 4 del Tipo 2*. Esto también es falso, ya que en este caso la persona consumiría $2 \cdot 50 + 4 \cdot 30 = 220\,\text{Kcal}$, por lo que tampoco le alcanza para consumir el mínimo de calorías requeridas.

La opción D) menciona que se puede *comer un mínimo de 8 galletas y un máximo de 12 del Tipo 1*, situación en la que consumiría entre $8 \cdot 50 = 400\,\text{Kcal}$ y $12 \cdot 50 = 600\,\text{Kcal}$, que es el rango de calorías que puede consumir la persona en galletas.

Por lo tanto, la opción correcta es la D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responderla necesitas interpretar correctamente la información del enunciado y, fundamentalmente, la presentada en una tabla de valores que muestra la información nutricional de los paquetes de galletas. A partir de esta, puedes usar inecuaciones para determinar cuántas Kcal requiere la persona como mínimo y como máximo para cumplir con la recomendación nutricional.

Entonces, para contestar la pregunta es necesario que hayas desarrollado las hablidades de Representar, de Resolver problemas y de Modelar.

PREGUNTA 23

La suma de dos números es 42, donde la tercera parte del número mayor (x) más la mitad del número menor (y) es igual al número menor.

¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales permite determinar los números?

A) $$\begin{array}{r} x + y = 42 \\ 3x + \dfrac{y}{2} = y \end{array}$$

B) $$\begin{array}{r} x = 42 - y \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = y \end{array}$$

C) $$\begin{array}{r} y = 42 + x \\ 3y + \dfrac{x}{2} = x \end{array}$$

D) $$\begin{array}{r} x = 42 + y \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = y \end{array}$$

Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: traducir del lenguaje común al matemático.

Para responder esta pregunta, puedes formar un sistema de ecuaciones lineales con las condiciones dadas en el enunciado. Debes considerar que el número mayor será representado por x y el menor, por y.

En el enunciado se menciona que la suma de ambos números es 42, por lo tanto, se tiene la ecuación $x + y = 42$, la cual se puede escribir como $x = 42 - y$.

Por otra parte, se dice que la tercera parte del número mayor $\left(\frac{x}{3}\right)$ más la mitad del número menor $\left(\frac{y}{2}\right)$ es igual al número menor y, por lo que puedes plantear la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = y$$

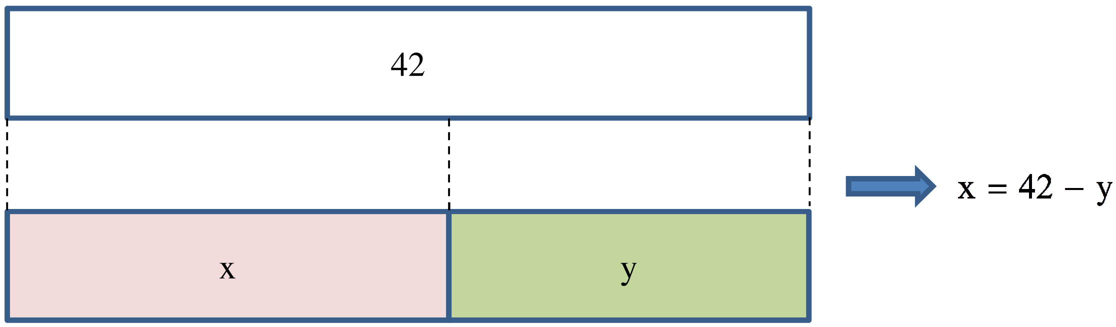
Así, puedes formar el sistema $\left.\begin{array}{r} x = 42 - y \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = y \end{array}\right|$.

La respuesta correcta, entonces, es la opción B).

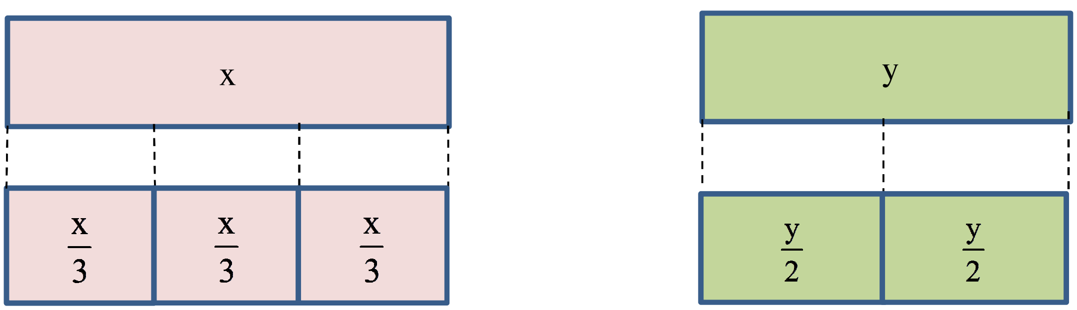
Estrategia 2: usar un esquema.

Otra forma de resolver este problema es considerar el siguiente esquema para interpretar la información entregada en el enunciado.

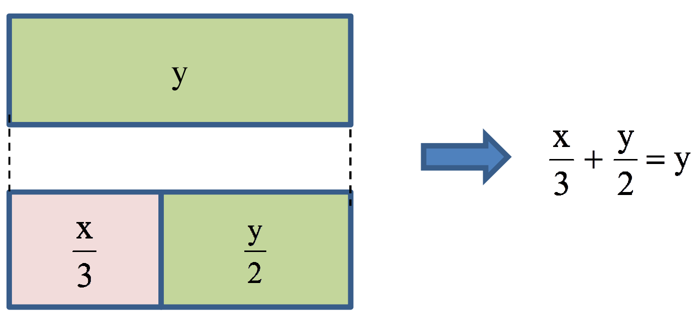
De la frase “La suma de dos números es 42” puedes representar $42 = x + y$ de la siguiente manera:



También, debes considerar la tercera parte de x y la mitad de y, como se representa a continuación:



Luego, en el enunciado se plantea que la tercera parte del número mayor más la mitad del número menor es igual a y, lo puedes representar por:



De las representaciones anteriores obtienes las ecuaciones $x = 42 - y$ y $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = y$.

La respuesta correcta es la opción B).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responder correctamente esta pregunta, necesitas saber cómo representar algebraicamente las relaciones establecidas en el enunciado entre dos números, traduciendo las frases en expresiones que te permiten escribir las ecuaciones que conforman el sistema de ecuaciones lineales, como se hizo en la Estrategia 1.

También puedes ayudarte de representaciones, como en la segunda estrategia, para entender las relaciones entre los números según las condiciones planteadas y así formular las ecuaciones del sistema requerido.

Entonces, deberías haber desarrollado la habilidad de Representar, al igual que las habilidades de Resolver problemas y de Modelar.

PREGUNTA 24

Si $\log_2(-2x + 3p) = 3$ y $\log_3(x + 2p) = 1$, ¿cuál es el valor de $(x - 2p)$?

A) 3

B) $\frac{-13}{7}$

C) $\frac{-27}{7}$

D) -5

E) $\frac{-37}{7}$

Estrategia de resolución

Para responder esta pregunta, puedes escribir cada uno de los logaritmos como potencia. Luego, mediante un sistema de ecuaciones, encontrar los valores de x y de p y, finalmente, reemplazarlos en la expresión $(x - 2p)$ para saber el valor de esta.

Si aplicas la definición de logaritmo a la igualdad $\log_2(-2x + 3p) = 3$, obtienes:

$$2^3 = -2x + 3p$$

Lo mismo debes realizar con la igualdad $\log_3(x + 2p) = 1$, de la que obtienes:

$$3^1 = x + 2p$$

A partir de estas dos ecuaciones, puedes plantear el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 = -2x + 3p \\ 3^1 = x + 2p \end{array}\right| \xrightarrow{\text{Si resuelves las potencias}} \left.\begin{array}{r} -2x + 3p = 8 \\ x + 2p = 3 \end{array}\right|$$

Ahora puedes resolver el sistema de ecuaciones lineales por cualquier método de resolución. En este caso se hará por reducción, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r} -2x + 3p = 8 \\ x + 2p = 3 \end{array}$$

Multiplicas por 2 ambos lados de la igualdad en la segunda ecuación

$$\begin{array}{r} -2x + 3p = 8 \\ 2x + 4p = 6 \end{array}$$

Sumas y reduces términos semejantes a cada lado de la igualdad

$$7p = 14$$

$$p = 2$$

Ahora que tienes el valor de p, puedes reemplazarlo en cualquiera de las dos ecuaciones. En este caso se reemplaza en $x + 2p = 3$, por lo que queda $x + 4 = 3$ y se llega a $x = -1$.

Si reemplazas estos valores en la expresión $(x - 2p)$ obtienes $-1 - 2 \cdot 2 = -1 - 4 = -5$.

La respuesta correcta, entonces, es la opción D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responderla correctamente necesitas conocer la relación que existe entre los logaritmos y las potencias. Con ello puedes plantear y resolver un sistema de ecuaciones que te entregue los valores necesarios para reemplazarlos en la expresión cuyo valor se pide determinar.

En este problema no contextualizado y no rutinario debes aplicar diversos conocimientos matemáticos realizando cálculos numéricos simples.

PREGUNTA 25

Una urna contiene en total 36 bolitas de dos tipos, A y B. Cada bolita del tipo A tiene una masa de $100\,\mathrm{g}$ y cada bolita del tipo B $150\,\mathrm{g}$.

Si la masa total de las bolitas en la urna es de $3.750\,\mathrm{g}$, ¿cuántas bolitas son del tipo B?

A) 3
B) 12
C) 15
D) 18
E) 33

Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Una forma que tienes para determinar cuántas bolitas del tipo B hay en la urna es comprender e identificar las variables dadas en el enunciado. Con ello puedes escribir dos ecuaciones lineales, con dos incógnitas, que te sirvan para establecer un sistema de ecuaciones y resolverlo por cualquier método de resolución, como se muestra en el siguiente desarrollo:

En el enunciado se dice que hay 36 bolitas de los tipos A y B. Si designas por x la cantidad de bolitas del tipo A y por y la cantidad de bolitas del tipo B, puedes escribir la ecuación $\mathrm{x} + \mathrm{y} = 36$.

Se sabe que la masa total de las bolitas en la urna es de $3.750\ \mathrm{g}$ y como la masa de las bolitas del tipo A es de $100\ \mathrm{g}$ y la masa de las bolitas del tipo B es de $150\ \mathrm{g}$, puedes escribir la ecuación $100\mathrm{x} + 150\mathrm{y} = 3.750$

Así, con estas dos ecuaciones podrías plantear un sistema de ecuaciones que puedes resolver por el método de sustitución, como se muestra a continuación:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{x} + \mathrm{y} &= 36 \\ 100\mathrm{x} + 150\mathrm{y} &= 3.750 \end{aligned}\right|$$

Como se necesita determinar la cantidad de bolitas del tipo B que hay en la urna, lo que debes hacer es encontrar el valor de la variable y. Para ello, de la primera ecuación despejas x, con lo que se llega a $\mathrm{x} = 36 - \mathrm{y}$.

Si reemplazas x por $36 - \mathrm{y}$ en la segunda ecuación, y luego resuelves la ecuación resultante, obtienes lo siguiente:

$$\begin{aligned} 100(36 - \mathrm{y}) + 150\mathrm{y} &= 3.750 \\ 3.600 - 100\mathrm{y} + 150\mathrm{y} &= 3.750 \\ 50\mathrm{y} &= 150 \\ \mathrm{y} &= 3 \end{aligned}$$

Del desarrollo anterior, puedes concluir que en la urna hay 3 bolitas del tipo B.

La respuesta correcta es la opción A).

Estrategia 2: probar con valores.

Otra manera de responder la pregunta es apoyándote con una tabla de valores.

Como se sabe que la cantidad total de bolitas del tipo A y B es 36 y que juntas tienen una masa total de $3.750\ \mathrm{g}$, puedes realizar las siguientes operaciones:

Bolitas					
Tipo A		Tipo B		Tipo A + tipo B	
Cantidad	Masa	Cantidad	Masa	Cantidad total	Masa total
36	$36 \cdot 100 = 3.600$	0	$0 \cdot 150 = 0$	36	$3.600 + 0 = 3.600$
35	$35 \cdot 100 = 3.500$	1	$1 \cdot 150 = 150$	36	$3.500 + 150 = 3.650$
34	$34 \cdot 100 = 3.400$	2	$2 \cdot 150 = 300$	36	$3.400 + 300 = 3.700$
33	$33 \cdot 100 = 3.300$	3	$3 \cdot 150 = 450$	36	$3.300 + 450 = 3.750$

Puedes observar en la tabla que con 3 bolitas del tipo B se cumple la condición de que la masa del total de bolitas en la urna sea $3.750\ \mathrm{g}$.

Por lo tanto, la opción correcta es la opción A).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Necesitas entender e interpretar la información entregada en el problema. Esto se debe hacer en ambas estrategias presentadas. En la primera estrategia tienes que determinar dos ecuaciones que te permitan resolver el problema a través de un sistema de ecuaciones.

En la segunda estrategia, no se escriben las ecuaciones, pero se calculan las masas para algunas cantidades de bolitas del tipo A y del tipo B, que sumadas sean 36 bolitas. Para usar esta estrategia es importante contar con algún criterio para poder visualizar que con pocos valores puedes encontrar la solución, pues no sería posible hacer una tabla en la que se calculen todos los valores para la cantidad de bolitas posibles del tipo B. Así, puedes ir probando con menores cantidades de bolitas del tipo B como se muestra en esta estrategia, o bien, probar con los valores dados en las opciones.

Para ambos casos se necesita haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas y de Representar.

PREGUNTA 26

Las medidas de los lados de un rectángulo son números pares consecutivos.

Si la superficie del rectángulo mide $48\ \mathrm{m}^2$, ¿cuánto mide el lado de menor medida?

A) $4\ \mathrm{m}$

B) $6\ \mathrm{m}$

C) $8\ \mathrm{m}$

D) $12\ \mathrm{m}$

E) $16\ \mathrm{m}$

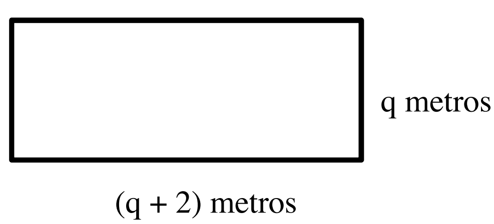
Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: plantear y resolver una ecuación cuadrática.

Para responder esta pregunta, puedes representar las dimensiones del rectángulo a través de expresiones algebraicas, y luego plantear una ecuación de segundo grado que te permita determinar la medida del lado menor del rectángulo.

En el enunciado se dice que el largo y el ancho del rectángulo son dos números pares consecutivos, por lo que puedes asignar como $\mathrm{q\ metros}$ a la medida del lado menor y como $(\mathrm{q} + 2)\ \mathrm{metros}$ a la medida del lado mayor.

Lo anterior lo puedes representar de la siguiente manera



Además, se sabe que la superficie del rectángulo mide $48\ \mathrm{m}^2$ y que esta se calcula multiplicando la medida de su ancho por la medida de su largo. Entonces, puedes escribir la siguiente ecuación cuadrática:

$$\mathrm{q}(\mathrm{q} + 2) = 48$$

Esta ecuación la puedes resolver de la siguiente manera:

$$q(q+2)=48$$

$$q^2+2q=48$$

$$q^2+2q-48=0$$

$$(q+8)(q-6)=0$$

De la factorización anterior, se concluye que $q=-8$ o $q=6$, pero q tiene que ser positivo, porque representa la medida de un lado del rectángulo. Así, el único valor válido para q es $6\ \text{m}$.

La respuesta correcta, entonces, es la opción B).

Estrategia 2: usar producto de números.

Otra manera que tienes para resolver este problema es encontrar números pares positivos que representen las medidas de los lados del rectángulo y que al multiplicarlos den como resultado $48\ \text{m}^2$.

Para esto, te puedes ayudar con una tabla de valores, como la que se muestra a continuación:

Lados del rectángulo	
Mayor medida	Menor medida
$24\ \text{m}$	$2\ \text{m}$
$12\ \text{m}$	$4\ \text{m}$
$8\ \text{m}$	$6\ \text{m}$

Si observas la tabla, puedes concluir que las medidas de la última fila cumplen con la condición de ser números pares consecutivos. La medida menor del rectángulo es $6\ \text{m}$.

La respuesta correcta es la opción B).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

En la resolución de este problema tienes que relacionar las medidas de los lados del rectángulo con una expresión que las represente. En este caso, debes saber expresar números pares consecutivos. De esta forma, puedes plantear una ecuación de segundo grado que represente el área del rectángulo, siendo fundamental que evalúes la pertinencia de la solución, como se hizo en la Estrategia 1.

Pero esta no es la única manera que tienes para responder la pregunta. Como se muestra en la Estrategia 2, también podrías utilizar una representación de las posibles medidas de los lados del rectángulo. En este caso se utilizó una tabla, lo que te permite visualizar las únicas medidas que pueden tomar los lados del rectángulo a partir de las condiciones planteadas en el enunciado.

En cuanto a qué necesitas saber hacer, debes haber desarrollado la habilidad de Resolver problemas, de Representar y de Modelar.

PREGUNTA 27

¿Cuál de los siguientes conjuntos contiene a todos los números reales p para los cuales la ecuación $3x^2 - px - \frac{1}{3} = 0$ tiene dos soluciones reales distintas?

A) $]-\infty, \infty[$

B) $]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$

C) $]-2, 2[$

D) $]2, \infty[$

E) $\varnothing$

Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: usar la fórmula para resolver una ecuación cuadrática.

Una manera que tienes de determinar qué números puede tomar p en la ecuación dada en la pregunta para que esta tenga dos soluciones reales y distintas, es encontrar una expresión para cada una de las soluciones y realizar un análisis de las condiciones que debe cumplir.

Para ello, recuerda que las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Es así que de la ecuación $3x^2 - px - \frac{1}{3} = 0$ obtienes que sus soluciones están dadas por $x = \dfrac{p \pm \sqrt{p^2 - 4 \cdot 3 \cdot -\frac{1}{3}}}{2 \cdot 3} = \dfrac{p \pm \sqrt{p^2 + 4}}{6}$.

Se sabe que p es un número real y para que $\dfrac{p \pm \sqrt{p^2 + 4}}{6}$ sea un número real, se debe cumplir que $\sqrt{p^2 + 4}$ también lo sea. Por ello, $p^2 + 4$ debe ser un número mayor o igual que 0. Al observarlo, puedes notar que siempre es mayor que 0, ya que para cualquier valor que tome p, su cuadrado es mayor que 0.

Luego, p puede ser cualquier número real, es decir, el conjunto que contiene a todos los posibles valores de p es el conjunto de los números reales, el que se puede representar por $\left]-\infty, \infty\right[$.

La respuesta correcta es la opción A).

Estrategia 2: usar el discriminante de una ecuación cuadrática.

Otra manera que tienes para responder la pregunta es mediante una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, que tiene dos soluciones reales y distintas cuando $b^2 - 4ac > 0$.

En la ecuación $3x^2 - px - \frac{1}{3} = 0$ tienes que $a = 3$, $b = -p$ y $c = -\frac{1}{3}$, y al reemplazar en $b^2 - 4ac > 0$, obtienes $p^2 - 4 \cdot 3 \cdot -\frac{1}{3} > 0$. Esto es lo mismo que decir $p^2 + 4 > 0$, relación que se cumple para cualquier número real. Entonces, el conjunto que contiene a todos los posibles valores de p es $\left]-\infty, \infty\right[$.

La respuesta correcta es la opción A).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Esta es una pregunta en la que no se pide un valor en particular, sino que se solicita determinar el conjunto de números que puede tomar una variable (p) para que se cumplan las condiciones planteadas. Para esto, debes recordar cuándo una ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales y distintas. Con esto en mente, puedes analizar las soluciones de la ecuación luego de haber aplicado la fórmula de la ecuación cuadrática como se hizo en la Estrategia 1. Otra opción es aplicar la propiedad de $b^2 - 4ac > 0$ dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, como se resolvió en la Estrategia 2.

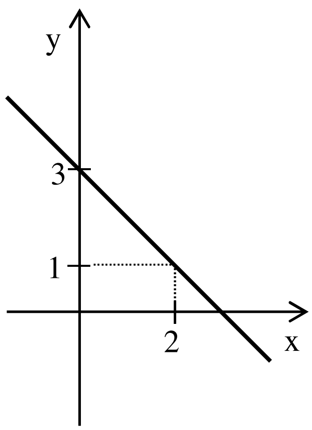
Así, para responder esta pregunta no contextualizada, debes aplicar los conocimientos relativos a la ecuación cuadrática para determinar la solución al problema y representarla en forma de intervalo.

PREGUNTA 28

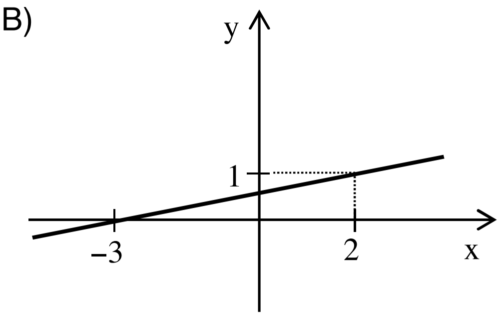
Considera la función f, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = 2x - 3$.

¿Cuál de los siguientes gráficos representa a la gráfica de f?

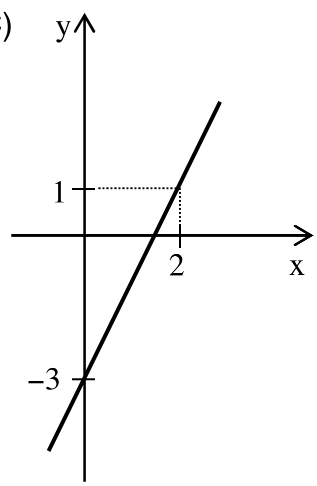
A)



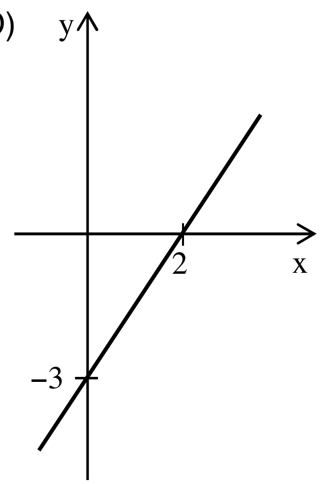
B)



C)



D)



Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: analizar las características de la función.

Para identificar cuál de las gráficas de las opciones representa a la función $f(x) = 2x - 3$, se puede analizar cada uno de los parámetros que la componen.

Como f es de la forma $f(x) = mx + n$, con m la pendiente y n el coeficiente de posición, puedes concluir que en la función la pendiente de su gráfica es 2, por lo tanto, al ser positiva, la función es creciente, lo que descarta la gráfica de la opción A), pues esta representa a una función decreciente.

También tienes que su coeficiente de posición es -3, es decir, la gráfica de la función corta al $\text{eje } y$ en el punto $(0, -3)$, lo que descarta al gráfico mostrado en la opción B).

Para identificar en qué punto la recta que representa a la función corta al $\text{eje } x$, debes encontrar el valor de x cuando $f(x) = 0$, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2x - 3 &= 0 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Así, la gráfica de la función corta al $\text{eje } x$ en el punto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, por lo que se descarta la gráfica que se muestra en la opción D).

Por el desarrollo anterior, se concluye que el gráfico que representa a la gráfica de la función es el de la opción C).

Estrategia 2: evaluar valores en la función.

Otra manera que tienes para determinar cuál de las gráficas dadas en las opciones corresponde a la gráfica de f, es utilizar una tabla de valores, en la que evalúes en la función las abscisas involucradas en los gráficos de las opciones, es decir, que determines $f(-3)$, $f(0)$ y $f(2)$, como se muestra a continuación:

x	$f(x)$
-3	$2\cdot -3 - 3 = -9$
0	$2\cdot 0 - 3 = -3$
2	$2\cdot 2 - 3 = 1$

De la tabla puedes concluir que la gráfica de f pasa por por los puntos $(-3, -9)$, $(0, -3)$ y $(2, 1)$, y al observar los gráficos de las opciones tienes que el de la opción C) cumple con pasar por estos puntos. Luego, esta opción es la correcta.

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para determinar cuál de los gráficos de las opciones corresponde a la función dada en el enunciado, puedes identificar los parámetros de una función lineal del tipo $f(x) = ax + b$ y su significado, como se hizo en la Estrategia 1.

Lo fundamental en esta pregunta es encontrar una estrategia que te permita pasar de un tipo de representación a otro. En este caso, de una función representada algebraicamente a su representación gráfica.

Por último, tienes que haber desarrollado las habilidades de Representar y de Resolver problemas.

PREGUNTA 29

Una compañía distribuidora de energía eléctrica cobra mensualmente un cargo fijo de $\$1.100$ y $\$65$ por kWh de consumo, pero si en los meses de invierno se superan los $200\,\mathrm{kWh}$, se aplica un recargo de $\$50$ por cada kWh de exceso.

¿Cuál de las siguientes funciones permite calcular el total que se debe pagar en un mes de invierno por $x\ \mathrm{kWh}$ si x es mayor que 200?

A) $f(x) = 1.100 + (200 \cdot 65) + 50x$

B) $p(x) = 1.100 + (200 \cdot 65) + 115x$

C) $g(x) = 1.100 + 115x$

D) $m(x) = 1.100 + (200 \cdot 65) + 115(x - 200)$

Estrategia de resolución

Para resolver el problema, debes comprender la información entregada en el enunciado para modelar, a través de una función, el cobro mensual de energía que se debe pagar por el consumo de $x\ \mathrm{kWh}$.

Lo primero que tienes que entender es que el cargo fijo de $\$1.100$ no depende de la cantidad de kWh consumidos y que siempre se debe considerar en el cobro de la cuenta de electricidad de un mes.

Se sabe que el total de kWh consumidos en un mes de invierno fue de $x\ \mathrm{kWh}$, con x mayor que 200, entonces la expresión $(x - 200)$ corresponde a los kWh adicionales a los $200\ \mathrm{kWh}$ consumidos en ese mes.

En cuanto al cobro por el consumo de kWh:

- En el enunciado se menciona que hasta los $200\ \mathrm{kWh}$ se cobra $\$65$ por kWh, por lo tanto, el cobro considerando solo los $200\ \mathrm{kWh}$ será de $\$65 \cdot 200$.
- También se menciona que por cada kWh adicional a los $200\ \mathrm{kWh}$, es decir, a los $(x - 200)\ \mathrm{kWh}$, se realiza un recargo de $\$50$, por lo que el valor de cada uno de esos kWh quedará en $\$115$. Entonces el cobro asociado a estos kWh será de $\$115(x - 200)$.

Finalmente, la función que modela el total a pagar en una cuenta de un mes de invierno de acuerdo a las condiciones dadas en el enunciado es:

$$m(x) = 1.100 + (200 \cdot 65) + 115(x - 200)$$

La respuesta correcta, entonces es la opción D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para resolver este problema, necesitas modelar el cobro que realiza la compañía eléctrica en los meses de invierno a través de una función afín.

En este caso se te pide que el modelo esté representado por una expresión algebraica. Para que la determines es fundamental que identifiques los distinos aspectos que componen este cobro. En este caso, el cobro fijo, el cobro por el consumo de 200 kWh y el cobro por la diferencia entre el consumo total y los 200 kWh ya considerados en el cobro anterior.

Para lo anterior, debes haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas, de Representar y de Modelar.

PREGUNTA 30

Un local comercial tiene un sistema de acumulación de puntos que está en relación con la cantidad de dinero que gastan los clientes, de tal forma que estos pueden cambiar los puntos acumulados por un artículo que se venda en el local.

Por cada $\$x$ se acumulan $\frac{x}{50}$ puntos y, además, se obtienen 5.000 puntos mensuales adicionales si se compra al menos una vez en el mes.

Si al comenzar agosto un cliente tiene 40.000 puntos y hace solo dos compras, de $\$12.000$ y de $\$38.000$, ¿cuántos puntos tendrá acumulados al final de este mes para canjearlos por un producto de ese local?

A) 6.000 puntos
B) 41.000 puntos
C) 46.000 puntos
D) 95.000 puntos

Estrategia 1: usar una función.

Para resolver este problema puedes modelar los puntos ganados en un mes por el cliente usando la información dada en el enunciado, y luego utilizar el modelo para calcular los puntos ganados en el mes de agosto.

Como se acumulan $\frac{x}{50}$ puntos por cada $\$x$ comprados en el local y, además, 5.000 puntos por haber comprado al menos una vez al mes en el local, se tiene que si en un mes se gastan $\$x$, entonces, se acumulan $P(x)$ puntos, dados por la función:

$$P(x) = 5.000 + \frac{x}{50}$$

Así, debido a que el cliente gastó $\$12.000 + \$38.000 = \$50.000$ el mes de agosto, se tiene que dicho mes ganó $P(50.000) = 5.000 + \frac{50.000}{50} = 6.000$ puntos.

Para llegar a la respuesta, no hay que olvidarse de sumar los puntos que tenía al comenzar el mes a los ganados en agosto, es decir,

$(40.000 + 6.000)$ puntos $= 46.000$ puntos.

La respuesta correcta es la opción C).

Estrategia 2: usar una tabla.

Otra manera que tienes para responder la pregunta es mediante una tabla, en la cual detalles el dinero gastado y los puntos acumulados en el mes de agosto.

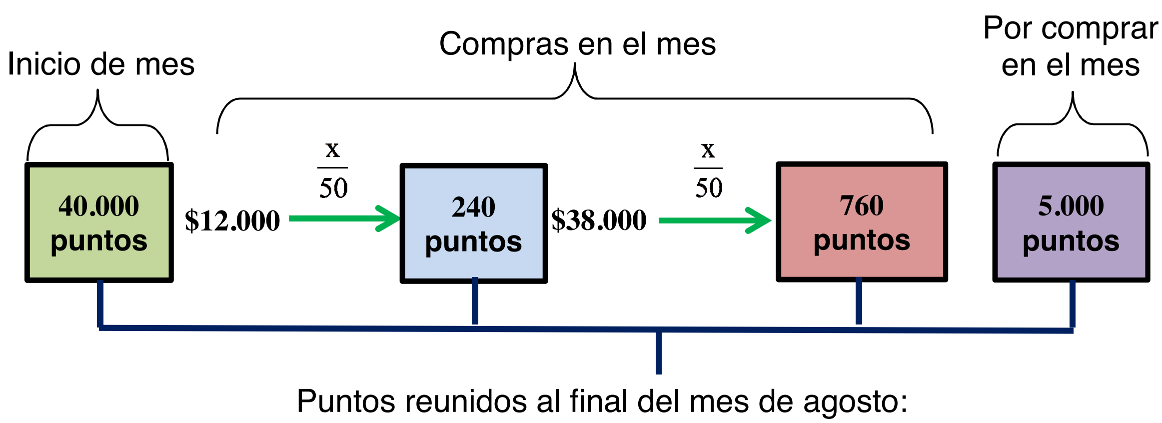
Mes de agosto	Dinero gastado	Puntos acumulados + Puntos por hacer al menos una compra en el mes + Puntos por la compra	Total de puntos
Inicio de mes	-	40.000	40.000
Primera compra	$\$12.000$	$40.000 + 5.000 + 240$	45.240
Segunda compra	$\$38.000$	$40.000 + 5.000 + 240 + 760$	46.000

Así, a fines de agosto los puntos acumulados son 46.000.

La respuesta correcta es la opción C).

Estrategia 3: usar un esquema.

Otra forma de responder la pregunta es mediante un esquema que represente la cantidad de puntos que obtiene el cliente al final del mes de agosto, tal como se muestra a continuación:



$$40.000 + 240 + 760 + 5.000 = 46.000 \text{ puntos}$$

Así, los puntos acumulados en el mes de agosto por el cliente son 46.000 puntos.

La respuesta correcta es la opción C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para resolver este problema, puedes utilizar múltiples estrategias, por ejemplo, establecer un modelo que te permita relacionar los datos de dicho problema tal como se hizo en la Estrategia 1, en la cual se modeló la situación mediante una función lineal del tipo $f(x) = ax + b$.

Además, puedes usar alguna representación que te permita visualizar la situación problemática identificando los puntos que obtiene el cliente durante el mes de agosto de acuerdo a las compras que realiza y así determinar lo obtenido al final de mes. Como observas, en las estrategias 2 y 3 tienes una tabla y un esquema que te permiten realizar esta visualización. Para dar respuesta a la pregunta del problema tienes que hacer solo operaciones entre números enteros.

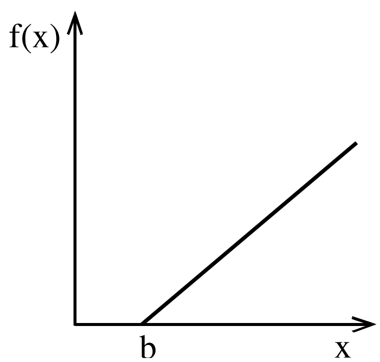
Por ello, para resolver este problema, tienes que haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas, Modelar y Representar.

PREFGUNTA 31

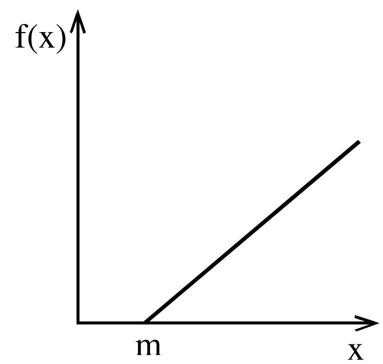
Una compañía de agua potable cobra un cargo fijo mensual de $\$b$, además de $\$m$ por cada metro cúbico de agua consumido en el mes.

Si $m \neq b$, ¿cuál de las siguientes gráficas representa mejor la relación entre los metros cúbicos consumidos (x) y el cobro mensual $f(x)$?

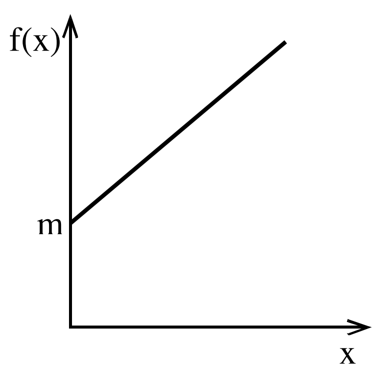
A)



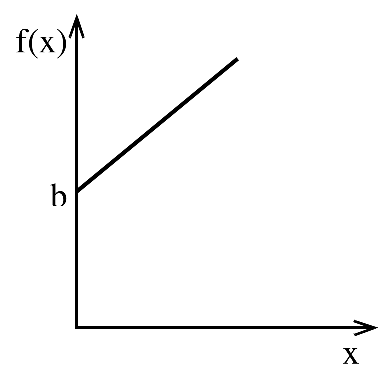
B)



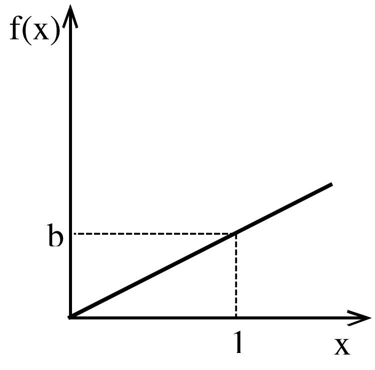
C)



D)



E)



Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: determinar una función afin.

Para dar respuesta a esta pregunta debes encontrar la función que modela el cobro mensual de agua en metros cúbicos, y luego identificar entre las opciones dadas la gráfica que mejor la representa.

Para encontrar la relación entre el cobro mensual $f(x)$ y los x metros cúbicos de agua potable consumidos en el mes, tienes que entender que por cada metro cúbico consumido se cobra $\$m$, por lo tanto, para x metros cúbicos se cobra $\$mx$.

Además, cada mes se realiza un cobro fijo de $\$b$, por lo que en un mes en que se consumen x metros cúbicos se tiene la función:

$$f(x) = mx + b$$

En esta función, el valor b es el coeficiente de posición de la gráfica asociada a f, el que indica que la gráfica corta al eje y en el punto $(0, b)$.

Si observas las gráficas de las opciones, te darás cuenta de que la que cumple con la condición anterior es la que está en la opción D), por lo que esta es la respuesta correcta.

Estrategia 2: relacionar el contexto con puntos de la gráfica.

Otra forma de responder la pregunta es que relaciones el punto inicial de la recta con el contexto del problema. En este caso, si no se produce consumo de agua solo se debe pagar el cobro fijo mensual, es decir, $\$b$. Entonces, cuando el cobro mensual (x) es cero, en la recta se representa con el punto $(0, b)$ y como el cobro por cada metro cúbico es fijo, la recta será creciente. Ambas condiciones se cumplen en el gráfico de la opción D), la cual es la respuesta correcta.

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responderla necesitas saber modelar la situación dada en el enunciado a través de una función afín. En este caso, reconocer la relación entre los metros cúbicos consumidos y el cobro mensual realizado por la compañía de agua potable, lo que te permite plantear la función. Luego, puedes identificar sus elementos y relacionarlos con las gráficas de las opciones, como se hizo en la Estrategia 1.

También puedes responder correctamente esta pregunta si relacionas de forma directa los elementos que se presentan en el cobro que realiza la compañía con las gráficas dadas en las opciones. Así tienes que el cobro fijo en el consumo del agua potable no depende de la cantidad de metros cúbicos consumidos. Por lo tanto, cuando no se ha consumido ningún metro cúbico de agua, igual habrá un cobro en la cuenta mensual, es decir, cuando se consumen 0 metros cúbicos de agua hay un cobro de $b. Esto fue lo que se usó en la segunda estrategia.

Para resolver este problema, se requiere haber desarrollado las habilidades de Representar y de Modelar.

PREGUNTA 32

Considera la función f, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

¿Cuál es el valor de $\frac{f(-2)}{3}$?

A) -1
B) $\frac{13}{3}$
C) 7
D) 13
E) 21

Estrategia de resolución

Para responder esta pregunta, debes evaluar el número -2 en la función dada, para luego dividir por 3, como se muestra a continuación:

$$\frac{f(-2)}{3} = \frac{3\cdot(-2)^2 - 2\cdot(-2) + 5}{3} = \frac{3\cdot 4 + 4 + 5}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

Este valor se encuentra en la opción C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Este es un problema no contextualizado y rutinario que involucra el conocimiento de funciones. Para resolverlo debes saber determinar la imagen de un número a través de una función cuadrática, además de operar con números racionales.

PREGUNTA 33

La ganancia obtenida en miles de pesos por la venta de x unidades de cierto artículo se modela mediante la función $g(x) = -(x - 3{,}2)^2 + 5$.

¿Cuál debe ser la cantidad de artículos vendidos para conseguir la mayor ganancia posible?

A) 3
B) 5
C) 8
D) 9

Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: usar el vértice de una parábola.

Al responder esta pregunta, debes determinar la cantidad de artículos vendidos que permite obtener la mayor ganancia posible según la función que modela dicha ganancia. Para esto, hay que recordar que en una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a < 0$, la parábola asociada a f es cóncava hacia abajo, por lo que la función tiene un valor máximo para la abscisa del vértice $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

En la función de la pregunta $g(x) = -(x - 3{,}2)^2 + 5$ debes desarrollar el cuadrado del binomio, y luego reducir los términos semejantes para escribirla de la forma que aparece en el párrafo anterior, como se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= -(x - 3{,}2)^2 + 5 \\
g(x) &= -(x^2 - 2 \cdot 3{,}2 \cdot x + (3{,}2)^2) + 5 \\
g(x) &= -x^2 + 6{,}4x - 10{,}24 + 5 \\
g(x) &= -x^2 + 6{,}4x - 5{,}24
\end{aligned}
$$

Como el coeficiente que acompaña a x^2 es negativo, la mayor ganancia se dará para la cantidad de artículos que corresponden a la abscisa del vértice de la parábola asociada a esta función.

De la función g, se tiene que $a = -1$ y $b = 6{,}4$. Al reemplazar estos valores en la abscisa del vértice $x = \frac{-b}{2a}$, obtienes que $x = \frac{-6{,}4}{-2} = 3{,}2$.

Según este resultado, se deben vender $3{,}2$ artículos para conseguir la mayor ganancia, pero considerando que estos son unidades completas, la mayor ganancia se generará al vender 3 artículos.

La respuesta correcta es la opción A).

Estrategia 2: usar la traslación de funciones.

Otra manera que tienes de resolver este problema es considerar que la gráfica de la función es la trasladada de una función de la forma $f(x) = -ax^2$, la cual es cóncava hacia abajo. Esto significa que posee un máximo para el valor del vértice de la parábola asociada a ella.

Luego, si trasladas la gráfica de f h unidades hacia la derecha y k unidades hacia arriba, obtienes que la expresión que representa la nueva función es $-a(x - h)^2 + k$, de tal manera que el vértice de la parábola asociada a esta función tiene coordenadas (h, k).

De lo anterior, se tiene que la función $g(x) = -(x - 3{,}2)^2 + 5$ es la trasladada de la función $p(x) = -x^2$, por lo que $h = 3{,}2$, valor que corresponde a la cantidad de artículos que se deben vender para obtener la mayor ganancia. Así, la mayor ganancia se consigue al vender 3 artículos.

La respuesta correcta, entonces, es la opción A).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responderla, es necesario que identifiques cuándo una función se puede representar gráficamente por una parábola. Además, qué elemento de la parábola se asocia a la maximización de la función, pues en este problema en particular se requiere determinar la cantidad de artículos que se deben vender para maximizar la ganancia.

Considerado lo antes mencionado, puedes seguir varios caminos. Por ejemplo, ordenar la expresión que representa la función cuadrática que modela la ganancia, para dejarla de la forma $ax^2 + bx + c$ y definir los coeficientes numéricos que permitan determinar la abscisa del vértice de la parábola asociada a la función, que corresponde a la cantidad de artículos vendidos para obtener la mayor ganancia posible, como se hizo en la Estrategia 1.

Por otra parte, puedes determinar la abscisa del vértice interpretando los coeficientes de la función dada en el enunciado, reconociendo que esta es una traslación vertical y horizontal de la función $p(x) = -x^2$, de la que puedes obtener directamente la cantidad de artículos solicitados, como está explicitado en la segunda estrategia.

En ambas estrategias es fundamental que al final evalúes la pertinencia del resultado, entendiendo que la cantidad de artículos solicitada es un número entero, pues no se pueden vender por partes.

Por lo tanto, debes haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas y de Modelar.

PREGUNTA 34

En un computador se simula el lanzamiento de un proyectil desde el nivel del suelo con una trayectoria parabólica que logra su máxima altura a los 5 segundos.

Si se sabe que al segundo de ser lanzado alcanzó una altura de $27\ \text{m}$, ¿cuál de las siguientes funciones modela, en m, la altitud lograda por el proyectil, luego de t segundos?

A) $p(t) = 28t - t^2$

B) $f(t) = 27t^2$

C) $s(t) = 30t - 3t^2$

D) $q(t) = 5 + 27t - 5t^2$

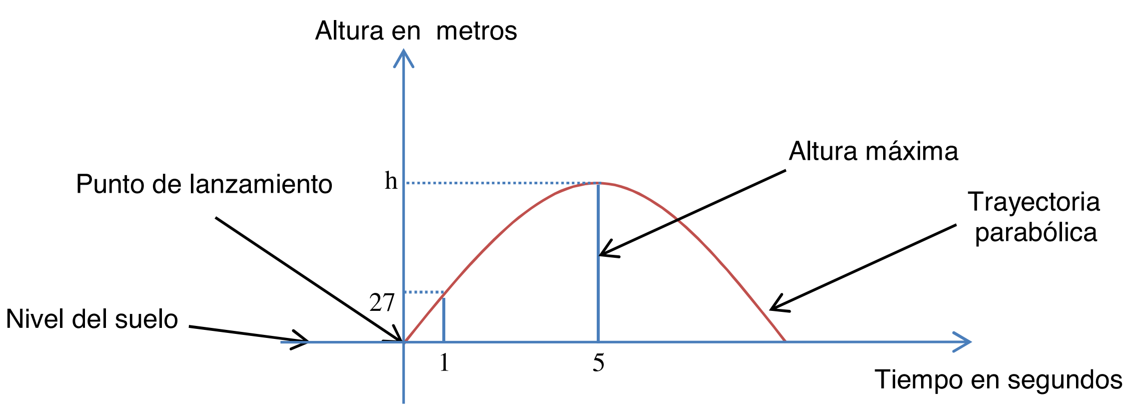
E) $m(t) = -27 + 60t - 6t^2$

Estrategia de resolución

Para resolver este problema debes encontrar una función que modele la altura, en metros, de un proyectil que fue lanzado desde el nivel del suelo luego de t segundos.

Como la trayectoria tiene forma de parábola, esta situación se modela con una función cuadrática de la forma $f(t) = at^2 + bt + c$. A partir de esta información, debes encontrar los valores de a, b y c para definir la función.

Para ello, puedes realizar un bosquejo de la trayectoria parabólica en el plano cartesiano que te ayude a visualizar de mejor manera los datos dados en el enunciado. Esto se muestra a continuación:



Debido a que el lanzamiento del proyectil se hace desde el nivel del suelo y en $t = 0$, se tiene que la altura es 0 y la parábola corta al eje y en el punto $(0, 0)$. Según lo anterior, el valor de c en la función $f(t) = at^2 + bt + c$ es 0, por lo que queda $f(t) = at^2 + bt$.

De la figura puedes concluir que el vértice de la parábola es $(5, h)$, ya que a los 5 segundos la trayectoria del lanzamiento tiene la altura máxima h. Además debes recordar que la abscisa del vértice está dada por la expresión $\frac{-b}{2a}$, que te permite escribir la igualdad $\frac{-b}{2a} = 5$ y si despejas b obtienes que $b = -10a$, quedando la función como $f(t) = at^2 - 10at$.

Por otro lado, como el punto $(1, 27)$ pertenece a la gráfica, puedes reemplazarlo en la función, obteniendo que $27 = a - 10a$. Luego, al despejar a en esta ecuación lineal, obtienes $a = -3$.

Así, la función que modela la altura que alcanza el proyectil en el tiempo t es $f(t) = -3t^2 + 30t$.

La respuesta correcta es la opción C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responderla, debes modelar la situación planteada a través de una función, para lo cual es necesario que sepas que una trayectoria parábolica se asocia a una función cuadrática. También debes reconocer los elementos de la párabola, como el vértice y el punto de intersección de la parábola con los ejes coordenados.

En este problema, representar en una gráfica los datos entregados en el enunciado te permite visualizar de mejor manera los elementos involucrados en la situación que necesitas para plantear la función requerida. Además, puedes relacionar los coeficientes de la función con los datos con que cuentas.

Por lo anterior, para contestar la pregunta requieres haber desarrollado las habilidades de Modelar, de Representar y de Resolver problemas.

PREGUNTA 35

Considera la función cuadrática f, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Se puede determinar el signo de a si se sabe que:

(1) f tiene un valor máximo.

(2) $f(0) > 0$

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

Estrategia de resolución

Para responder correctamente esta pregunta, debes analizar si las condiciones dadas en (1) y/o en (2) te permiten determinar el signo de a de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Debes tener en consideración que este coeficiente está directamente relacionado con el tipo de concavidad que tiene la parábola asociada a esta función.

Lo primero que debes recordar es que si una función cuadrática tiene un valor máximo, entonces la parábola asociada tiene concavidad hacia abajo y, por lo mismo, el signo de a es negativo. De ello se concluye que la información dada en (1) es suficiente para responder la pregunta.

Con respecto a la información dada en (2), solo se sabe que la parábola corta al eje y en el semieje positivo, ya que $f(0) = c$ y $f(0) > 0$. Sin embargo, no es posible concluir nada sobre su concavidad, ya que esta puede ser hacia arriba o hacia abajo. Esto impide determinar el signo de a, de lo que se desprende que la información dada en (2) no es suficiente para responder la pregunta.

Por el desarrollo anterior, la respuesta correcta es la opción A).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

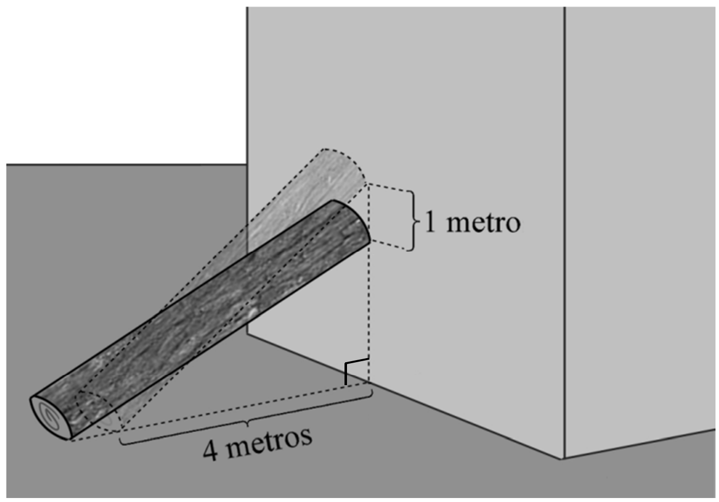
Para responderla debes recordar lo que significan los parámetros de una función cuadrática. En este caso, el coeficiente que acompaña a la variable cuadrática y el término libre. Utilizando dichos conocimientos, debes evaluar si la información entregada en (1) y en (2) te permite determinar lo solicitado.

Por lo tanto, debes de haber desarrollado la habilidad de Argumentar para decidir a través del análisis de la información si las condiciones dadas son suficientes para contestar la pregunta.

PREGUNTA 36

Una persona apoya un madero de $5\ \mathrm{m}$ de longitud en la pared de un edificio. La distancia del pie del madero a la pared es de $4\ \mathrm{m}$.

Se cambia la posición del madero en la pared desplazándolo verticalmente $1\ \mathrm{m}$ hacia abajo, como se representa en la siguiente figura:



¿Cuántos metros se deslizó el pie del madero respecto a su posición inicial?

A) $\left(\sqrt{21}-4\right)\mathrm{m}$

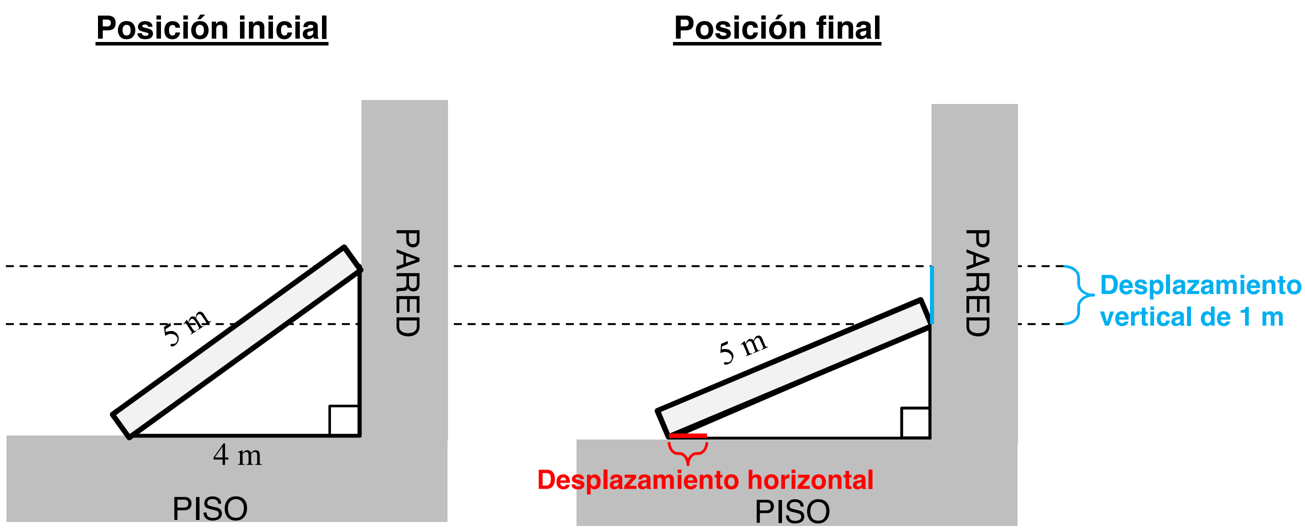
B) $1\ \mathrm{m}$

C) $\sqrt{21}\ \mathrm{m}$

D) $5\ \mathrm{m}$

Estrategia de resolución

En primer lugar, para resolver el problema debes considerar que a partir de la figura se ve que el madero, el piso y la pared forman un triángulo rectángulo. A partir de ello, puedes hacer un diagrama para representar la posición inicial del madero y otro para la posición final de él, como se muestra a continuación:



La representación anterior te permite ver que puedes calcular la altura a la que está apoyado el madero en la posición inicial usando el teorema de Pitágoras. Así, tienes que la altura a la que está apoyado el madero es $\left(\sqrt{5^2 - 4^2}\right) \text{m} = 3 \text{ m}$.

Como el madero se deslizó un metro hacia abajo para llegar a la posición final, este queda apoyado en la pared a 2 m de altura. Considerando que el largo del madero sigue siendo 5 m, puedes calcular la distancia del pie del madero a la pared utilizando nuevamente el teorema de Pitágoras, obteniendo que esta distancia es $\left(\sqrt{5^2 - 2^2}\right) \text{m} = \sqrt{21} \text{ m}$.

De este modo, la cantidad de metros que se deslizó el pie del madero respecto a su posición inicial es $\left(\sqrt{21} - 4\right) \text{m}$.

La respuesta correcta es la opción A).

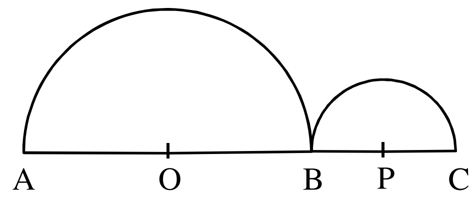
¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responderla, tienes que conocer y aplicar el teorema de Pitágoras reconociendo la existencia de triángulos rectángulos en situaciones de la vida cotidiana. Para esto, puedes utilizar representaciones como la que se usó en la resolución, en la que la figura 3D dada en el problema se llevó a una figura plana.

Por lo anterior, debes haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas y de Representar.

PREGUNTA 37

En la figura adjunta, $AC = 12$ cm y $AO = 2 \cdot BP$.



¿Cuál es la suma de las áreas de los dos semicírculos de centro O y P?

A) $6\pi \text{ cm}^2$

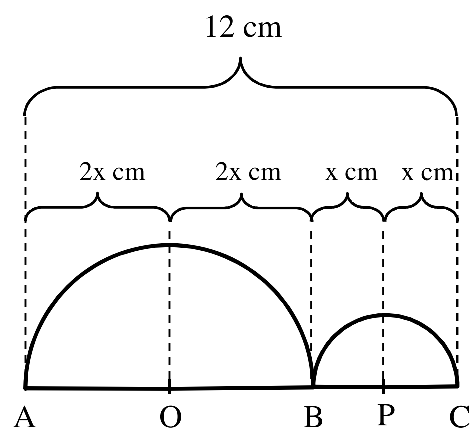
B) $10\pi \text{ cm}^2$

C) $12\pi \text{ cm}^2$

D) $20\pi \text{ cm}^2$

Estrategia de resolución

En el problema se pide calcular la suma de las áreas de los semicírculos de la figura por lo que tienes que conocer cada uno de los radios. Para ello, puedes ayudarte poniendo en la figura toda la información dada en el enunciado, como se muestra en el siguiente diagrama, considerando que $BP = x$ cm.



Para encontrar el valor de x debes resolver la ecuación $2x + 2x + x + x = 12$, de la que obtienes que $x = 2$. Entonces, los radios de los semicírculos de centros O y P son 4 cm y 2 cm, respectivamente.

Una vez que ya tienes los radios de cada una de las semicircunferencias, debes calcular sus áreas, para lo que debes recordar la fórmula con la que se puede determinar el área de un semicírculo de radio r: $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$. Así, la suma de las áreas de los semicírculos es

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{16}{2}\pi + \frac{4}{2}\pi = \frac{20}{2}\pi = 10\pi \text{ cm}^2$$

La respuesta correcta es la opción B).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responderla debes interpretar los datos del enunciado para transferirlos a la figura. Esto te permite visualizar la relación que se da entre estos datos, acción que es de mucha utilidad en problemas geométricos.

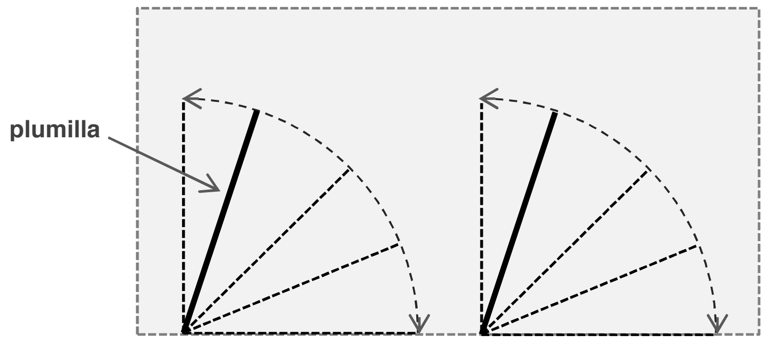
En este caso, puedes plantear una ecuación de primer grado para encontrar el radio de ambas semicircunferencias y con estas medidas calcular la suma de las áreas de los semicírculos, como se muestra en la resolución.

Así, para resolver este problema requieres de Representar y de Resolver problemas.

PREGUNTA 38

El parabrisas de un auto de juguete es plano y de forma rectangular. Su largo es 13 cm y su ancho 8 cm.

El auto cuenta con 2 plumillas de 6 cm de longitud cada una para limpiar el parabrisas. Estas tienen un ángulo de abertura de $90°$, tal como se muestra a continuación.



Si las plumillas limpian con todo su largo, ¿cuál es el área de la superficie del parabrisas que no alcanzan a cubrir las plumillas?

A) $(42 - 6\pi) \text{ cm}^2$

B) $(42 - 12\pi) \text{ cm}^2$

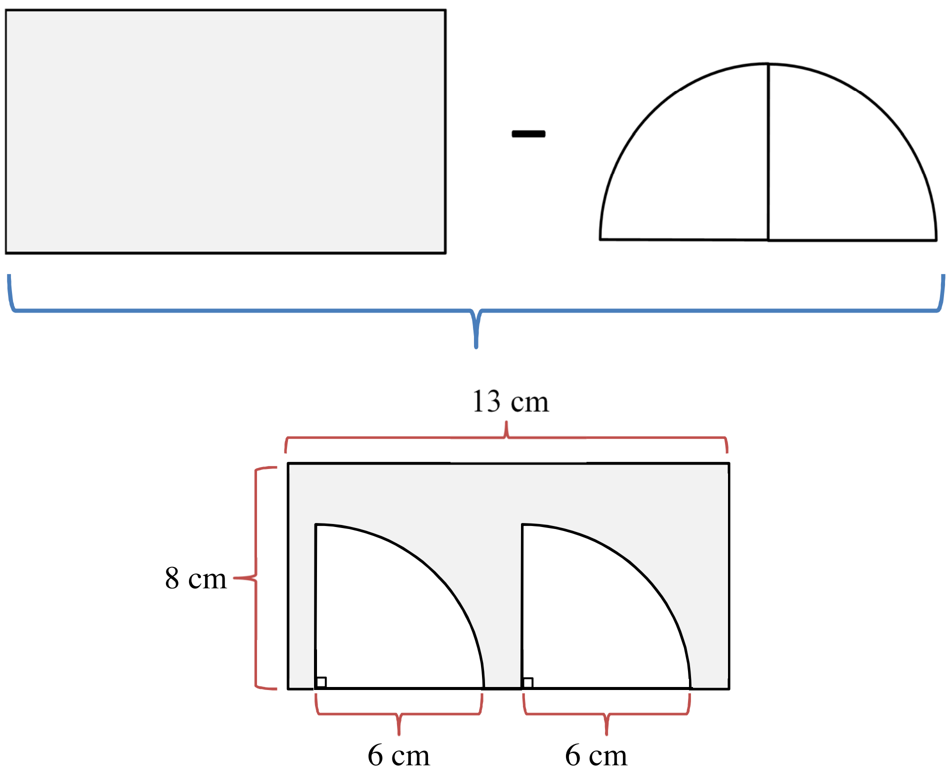
C) $(104 - 9\pi) \text{ cm}^2$

D) $(104 - 18\pi) \text{ cm}^2$

Estrategia de resolución

Para resolver este problema puedes hacer un diagrama del área del parabrisas que se alcanza a limpiar con las plumillas y así visualizar el área del parabrisas que no alcanzan a cubrir. Además, podrías poner en la figura los datos entregados en el enunciado.

En el siguiente diagrama puedes ver que el área de la superficie del parabrisas que no alcanzan a limpiar las plumillas se puede descomponer como la diferencia entre el área de un rectángulo y la mitad de un círculo.



Una vez que ya determinaste cuál es la superficie del parabrisas que no alcanzan a limpiar las plumillas, debes calcular el área del rectángulo, y luego restarle el área de un semicírculo. Recuerda que la fórmula para determinar el área de un semicírculo de radio r es $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$.

Así, el área de la superficie pedida es $13 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 6^2 = (104 - 18\pi)\ \text{cm}^2$.

La respuesta correcta, entonces, es la opción D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responderla correctamente, debes darte cuenta de que la figura geométrica que se forma cuando funciona cada plumilla corresponde a un cuarto de un círculo, y que al juntar ambas superficies se forma un semicírculo.

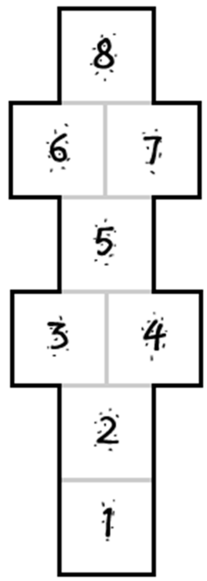
Además, para determinar el área del parabrisas que no cubren las plumillas debes tener presente cómo se calcula el área de un rectángulo y de un semicírculo. A partir de ello, tienes que calcular la diferencia entre ambas áreas, para lo cual sirve usar una representación, como la usada en la resolución, que te permita visualizar la descomposición de las figuras y ver los datos con los que cuentas.

Este problema requiere que hayas desarrollado las habilidades de Resolver problemas y de Representar.

PREGUNTA 39

En el suelo del patio de un colegio se dibuja un juego conocido como "Luche".

Este juego se compone de cuadrados congruentes entre sí, dibujados uno al lado del otro y en la posición que se muestra en la siguiente figura.



Daniela le dice a Camilo que ella calculó el área total de los cuadrados, lo que le dio $7.200\ \text{cm}^2$, y le pide que calcule el perímetro de la figura completa para saber cuánta cinta adhesiva necesita colocar en los bordes del Luche.

¿Cuál es la longitud de la cinta?

A) $240\ \text{cm}$

B) $420\ \text{cm}$

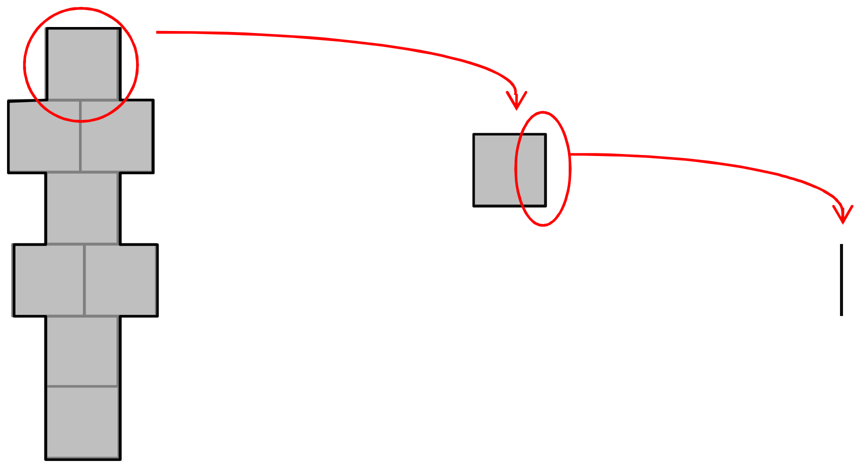
C) $540\ \text{cm}$

D) $960\ \text{cm}$

Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: sumar los segmentos que componen la figura.

Una forma de resolver este problema es encontrar la medida del lado de cada uno de los cuadrados que forman el Luche con la ayuda de un diagrama.

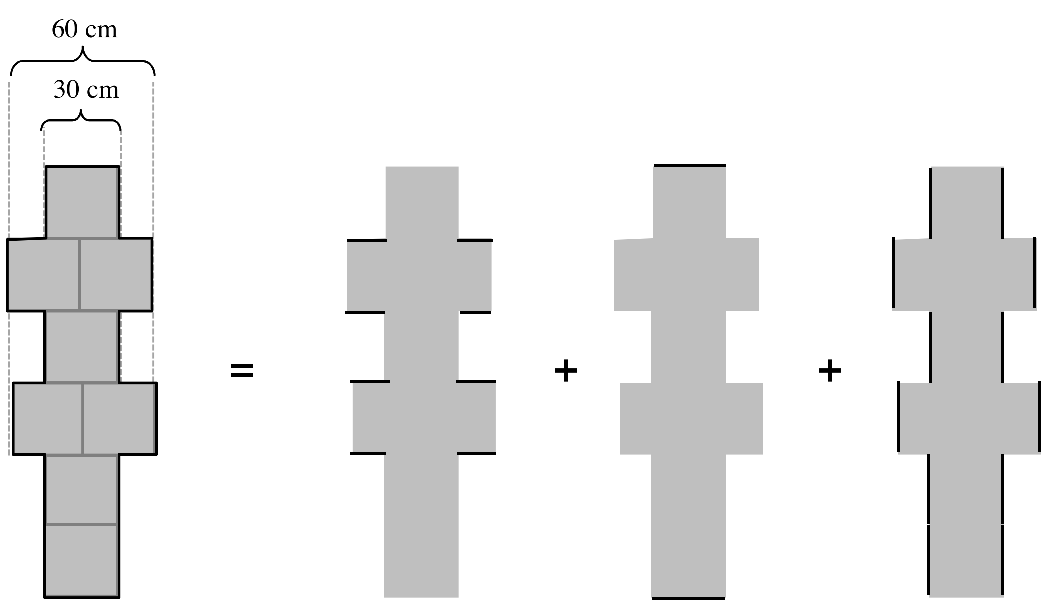


1. Figura de $7.200\ \text{cm}^2$ de área total.

2. Como la figura está formada por 8 cuadrados congruentes, cada cuadrado tiene un área de $\dfrac{7.200\ \text{cm}^2}{8} = 900\ \text{cm}^2$

3. Como el área de un cuadrado se calcula como la medida del lado al cuadrado, se obtiene que la medida de un lado es $\sqrt{900\ \text{cm}^2} = 30\ \text{cm}$

Ahora, para calcular el perímetro del Luche, puedes descomponerlo en las medidas de sus lados.



Perímetro figura $= \quad 4(60\ \text{cm} - 30\ \text{cm}) \quad + \quad 2(30\ \text{cm}) \quad + \quad 12(30\ \text{cm})$

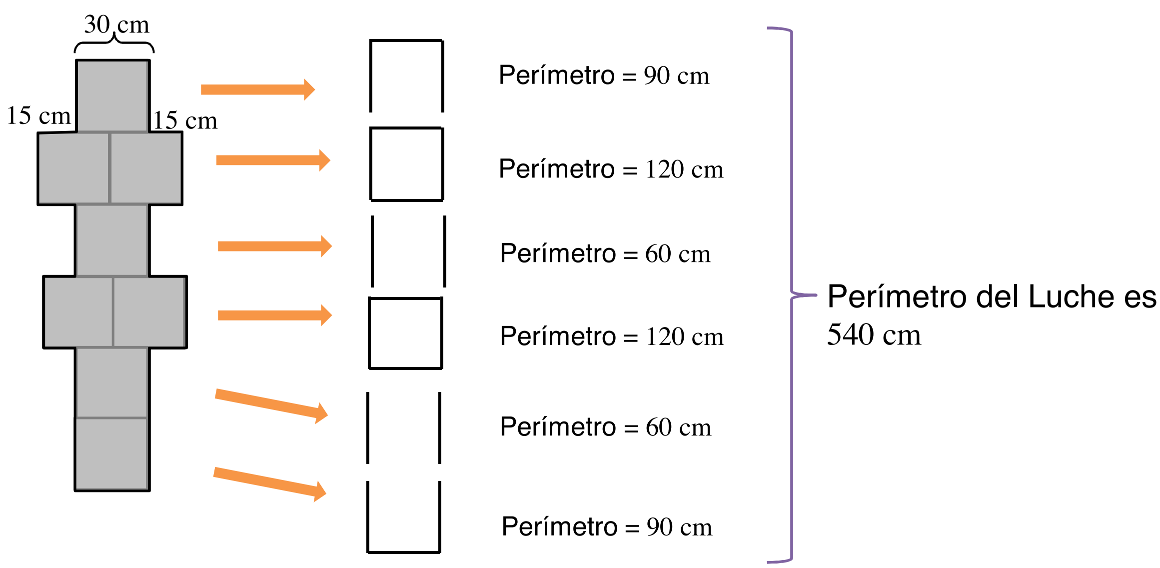
Así, el perímetro de la figura es 540 cm.

La respuesta correcta es la opción C).

Estrategia 2: **descomponer la figura por niveles.**

Como puedes ver, el Luche está formado por 8 cuadrados congruentes de área $\dfrac{7.200 \text{ cm}^2}{8} = 900 \text{ cm}^2$. Por lo tanto, cada lado del cuadrado mide $\sqrt{900 \text{ cm}^2} = 30 \text{ cm}$.

Para calcular el perímetro puedes usar el siguiente esquema, en el cual se desglosa el perímetro que deberías calcular en cada nivel del Luche:



La respuesta correcta es la opción C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responderla tienes que descomponer figuras geométricas complejas en figuras geométricas más simples para calcular el perímetro que te solicitan: en este caso, el del Luche. En la Estrategia 1 debes analizar la figura dada y comprender que las medidas de los segmentos que la componen son de los lados de los cuadrados congruentes que la forman y partes de estos lados.

En cambio, en la segunda estrategia debes descomponer cada nivel del Luche en la figura que se forma con los bordes de este, que son los que se consideran en el cálculo del perímetro. Para ello, tienes que reconocer que en dos de los niveles se forman cuadrados cuyos lados tienen igual medida que los lados de los cuadrados que conforman el Luche.

Para ambas estrategias debes darte cuenta de que el Luche está conformado por ocho cuadrados congruentes entre sí, lo que te permite determinar el área y la medida del lado de cada uno de estos cuadrados.

Por lo anterior, tienes que haber desarrollado la habilidad de Representar y de Resolver problemas.

PREGUNTA 40

Considera los vectores $\vec{u} = (-2, 5)$, $\vec{v} = (3, -2)$ y $\vec{c} = (-1, -4)$.

¿Cuál es el vector $\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{c}$?

A) $(3, 5)$

B) $(5, 5)$

C) $(4, 9)$

D) $(2, 1)$

E) $(5, 7)$

Estrategia de resolución

Para resolver este problema, tienes que saber cómo operar con vectores. Para ello, debes reemplazar los vectores dados en la expresión, tal como se muestra en el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}
&\vec{u} + 2\vec{v} - \overline{c} \\
&= (-2, 5) + 2(3, -2) - (-1, -4) \\
&= (-2, 5) + (6, -4) + (1, 4) \\
&= (-2 + 6 + 1, 5 - 4 + 4) \\
&= (5, 5)
\end{aligned}$$

La respuesta correcta es la opción B).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Esta pregunta requiere la habilidad de resolver problemas rutinarios no contextualizados, para lo que se necesita que sepas operar con vectores. En este caso particular, debes saber sumar, restar y ponderar por un escalar un vector, realizando operatoria básica con números enteros.

PREGUNTA 41

Si el punto (a, b) es la imagen que se obtiene al trasladar el punto R según el vector (m, n), ¿cuáles son las coordenadas de R?

A) (am, bn)

B) $(a - m, b - n)$

C) $(m - a, n - b)$

D) $(a + m, b + n)$

E) $\left(\frac{a + m}{2}, \frac{b + n}{2}\right)$

Estrategia de resolución

Para resolver este problema, debes conocer la relación que hay entre la traslación de un punto según un vector y la operatoria de vectores. Así podrás determinar las coordenadas iniciales del punto trasladado.

Si consideras que el punto R tiene coordenadas (x, y) y este se traslada según el vector (m, n), obteniendo como imagen el punto (a, b), puedes escribir la siguiente igualdad:

$$(x, y) + (m, n) = (a, b)$$
$$(x + m, y + n) = (a, b)$$

Analizando la igualdad anterior por coordenadas, obtienes las siguientes ecuaciones:

$$x + m = a \qquad\qquad y + n = b$$

Luego, al despejar x e y en la ecuación respectiva, obtienes que $x = a - m$ e $y = b - n$, por lo que las coordenadas de R son $(a - m, b - n)$.

La respuesta correcta es la opción B).

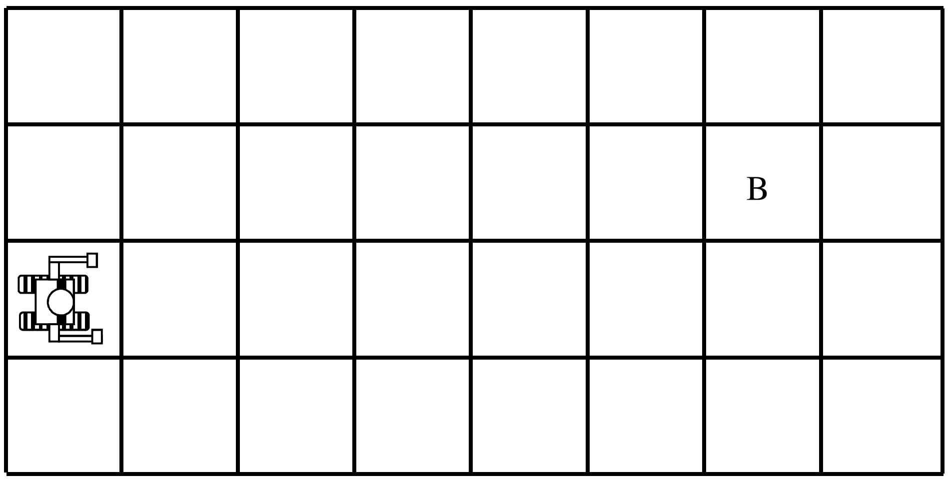
¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Esta pregunta requiere que sepas trasladar un elemento geométrico según un vector dado. En este caso, dicho conocimiento conlleva saber qué significa que un punto sea la imagen de otro punto bajo el movimiento de una traslación. Además, necesitas saber operar con vectores y resolver ecuaciones lineales.

Este es un problema rutinario de traslación de figuras, en el cual debes aplicar tus conocimientos geométricos y algebraicos.

PREGUNTA 42

Antonia está programando un robot para que viaje desde el lugar donde se encuentra hasta el punto B, que se representa en la cuadrícula de la siguiente figura:



El comando utilizado para programar los movimientos del robot es $\mathrm{T}(\mathrm{m}, \mathrm{p})$, en el que m es la cantidad de casilleros que se avanza en forma horizontal hacia adelante y p es la cantidad de casilleros que se avanza en forma vertical hacia arriba.

Antonia programa la siguiente secuencia de movimientos:

Movimiento 1: $\mathrm{T}(0, 1)$

Movimiento 2: $\mathrm{T}(2, 0)$

Movimiento 3: $\mathrm{T}(1, 1)$

Movimiento 4: $\mathrm{T}(4, 0)$

Con estos, el robot no llega al punto B de la cuadrícula.

¿Cuál de los movimientos anteriores tendría que quitar Antonia para que el robot cumpla su objetivo?

A) El movimiento 1

B) El movimiento 2

C) El movimiento 3

D) El movimiento 4

Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: seguir la secuencia de movimientos programados.

Para resolver este problema, tienes que seguir la secuencia de movimientos programados por Antonia en la cuadrícula de la figura dada. De esta manera podrás reconocer el movimiento que hay que quitar de los cuatro que programó Antonia para llegar al punto B.

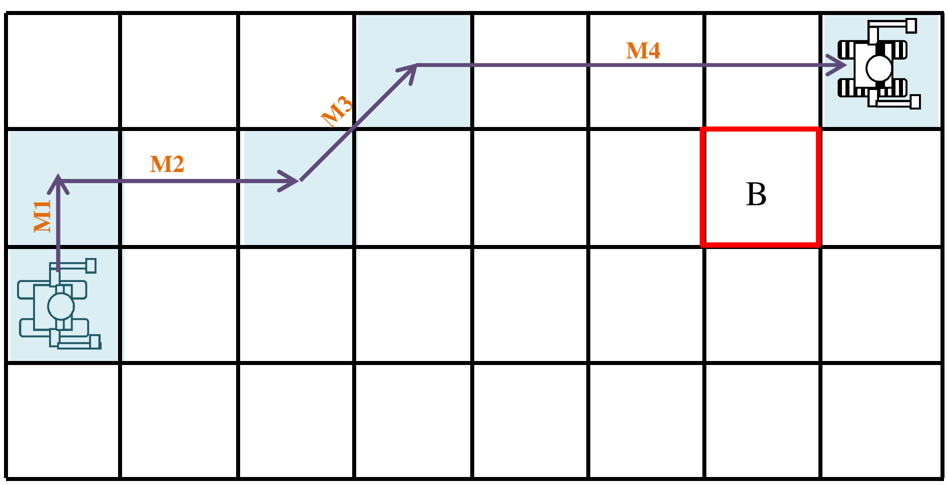
Para esto, debes interpretar cada uno de los comandos dados de la siguiente forma:

M1: $\mathrm{T}(0, 1)$ corresponde a avanzar en forma vertical hacia arriba 1 casillero.

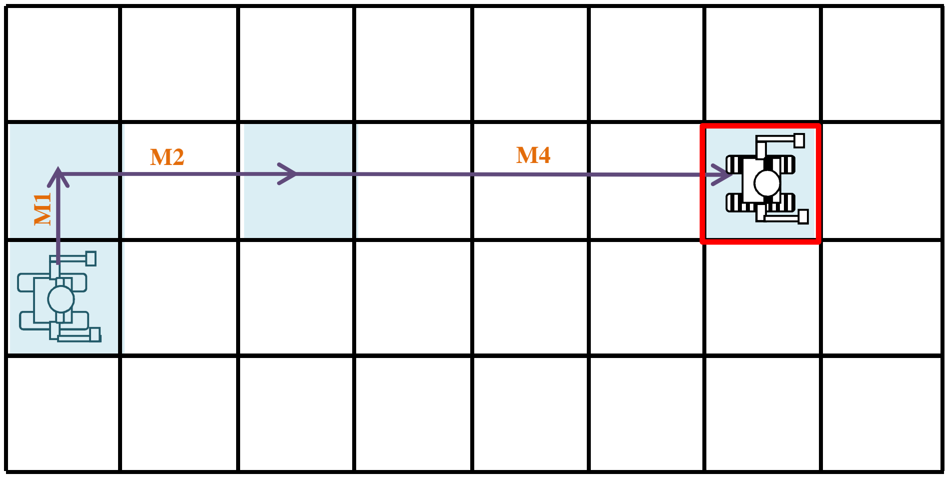
M2: $\mathrm{T}(2, 0)$ corresponde a avanzar en forma horizontal hacia adelante 2 casilleros.

M3: $\mathrm{T}(1, 1)$ corresponde a avanzar en forma horizontal hacia adelante 1 casillero y avanzar en forma vertical hacia arriba 1 casillero.

M4: $\mathrm{T}(4, 0)$ corresponde a avanzar en forma horizontal hacia adelante 4 casilleros.



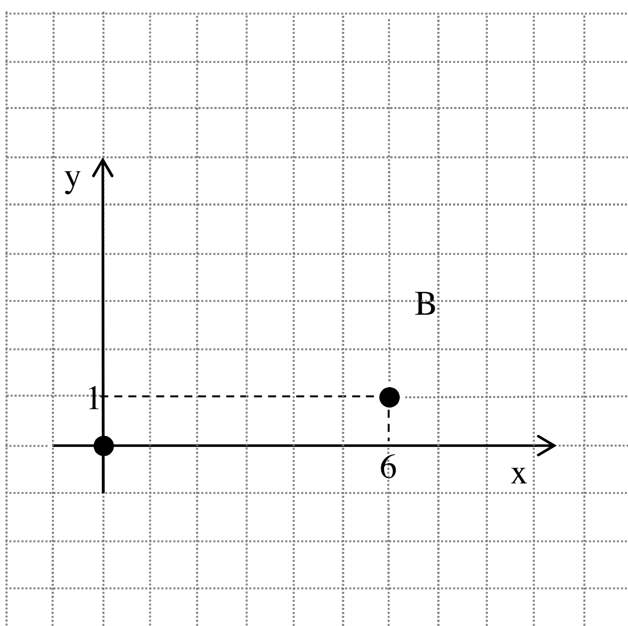
Observando el diagrama, puedes ver que si se quitara el movimiento 3, el robot llegaría a B, tal como se muestra en el siguiente diagrama:



La respuesta correcta es la opción C).

Estrategia 2: usar operatoria de vectores en el plano cartesiano.

Otra manera que tienes para resolver este problema es representar la situación planteada en un sistema de ejes coordenados en el que la posición inicial del robot es el punto $(0, 0)$ y la posición final es el punto $(6, 1)$.



Puedes sumar las coordenadas de los vectores que representan los movimientos, considerándolos de a tres, y determinar con cuáles puedes obtener el vector $(6, 1)$. De esta manera, debes verificar las sumas de los vectores que representan los movimientos 1, 2 y 3; los movimientos 2, 3 y 4; y los movimientos 1, 2 y 4.

Así, al sumar las coordenadas de los movimientos 1, 2 y 3, obtienes $(0, 1) + (2, 0) + (1, 1) = (3, 2)$, concluyendo que con estos movimientos no se llega al punto B.

Al sumar las coordenadas de los movimientos 2, 3 y 4, obtienes $(2, 0) + (1, 1) + (4, 0) = (7, 1)$, concluyendo que con estos movimientos no se llega al punto B.

Po último si sumas las coordenadas de los movimientos 1, 2 y 4, obtienes $(0, 1) + (2, 0) + (4, 0) = (6, 1)$. Luego, el movimiento que tendría que quitar Antonia es el 3.

La respuesta correcta es la opción C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Lo fundamental en esta pregunta es que sepas cómo realizar traslaciones de puntos, reconociendo que cada movimiento programado por Antonia representa un vector de traslación. Además, puedes observar que en el enunciado se entrega la información necesaria para interpretar cada una de las coordenadas de estos vectores.

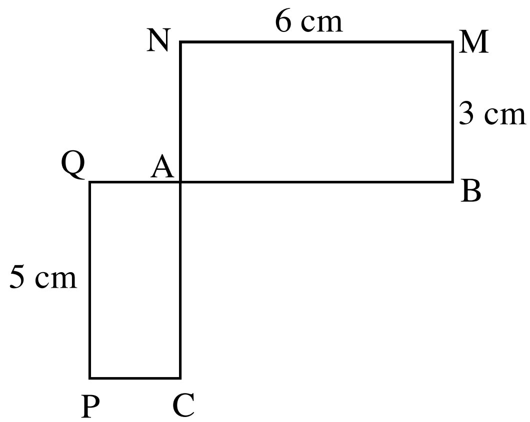
Para determinar cuál es el movimiento que no permite mover el robot al lugar donde está el punto B, tienes diversas estrategias de resolución. Por ejemplo, en la Estrategia 1 puedes realizar todos los movimientos programados por Antonia, representándolos por vectores, de manera que visualices cuál es el que no permite obtener el objetivo que ella tiene.

Por otro lado, puedes relacionar la figura dada en el enunciado del problema con el plano cartesiano, en el que debes representar los elementos de la situación, como son la posición inicial y final del robot, así como los vectores que representan los movimientos programados por Antonia, como se muestra en la Estrategia 2. En este caso, además debes saber sumar vectores.

Así, la habilidad principal que debieses haber desarrollado para responder esta pregunta es la de Representar, junto con la de Resolver problemas.

PREGUNTA 43

En la figura adjunta, ABMN y ACPQ son rectángulos. La longitud de $\overline{\text{AQ}}$ es menor que la longitud de $\overline{\text{PQ}}$.



¿Cuál de las siguientes medidas debe ser la longitud de $\overline{\text{AQ}}$ para que los rectángulos sean semejantes?

A) $\frac{2}{5}$ cm

B) $\frac{3}{5}$ cm

C) 2 cm

D) $\frac{5}{2}$ cm

E) 4 cm

Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: usar proporcionalidad de lados.

Para resolver este problema tienes que saber que para que dos rectángulos sean semejantes, la razón entre los lados correspondientes debe ser la misma. En este caso, como la longitud de $\overline{\text{AQ}}$ es menor que la longitud de $\overline{\text{PQ}}$ y considerando los datos de la figura, tienes que los lados correspondientes entre los rectángulos son $\overline{PQ}$ con $\overline{MN}$ y $\overline{AQ}$ con $\overline{BM}$.

Si consideras que la longitud de $\overline{AQ}$ es x cm, puedes plantear la proporción $\dfrac{x}{5} = \dfrac{3}{6}$.

Despejando el valor de x en la proporción anterior, obtienes que $x = \dfrac{5}{2}$, luego la longitud de $\overline{AQ}$ debe ser $\dfrac{5}{2}$ cm.

La respuesta correcta es la opción D).

Estrategia 2: usar áreas de figuras semejantes.

Otra manera que tienes de responder la pregunta es recordar que en dos figuras semejantes se cumple que la razón entre sus áreas es igual al cuadrado de la razón entre sus lados homólogos.

Así, como los lados homólogos entre los rectángulos son $\overline{PQ}$ con $\overline{MN}$ y $\overline{AQ}$ con $\overline{BM}$, puedes plantear la proporción $\dfrac{\text{área PCAQ}}{\text{área ABMN}} = \left(\dfrac{QP}{AB}\right)^2$.

Si reemplazas por los valores respectivos, obtienes $\dfrac{5 \cdot QA}{18} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^2$, y al despejar QA, tienes que $QA = \dfrac{5}{2}$ cm.

La respuesta correcta es la opción D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responderla correctamente tienes que saber la relación que hay entre las medidas de los lados correspondientes de dos rectángulos semejantes y, también, saber resolver ecuaciones derivadas de una proporción, como se hizo en la Estrategia 1.

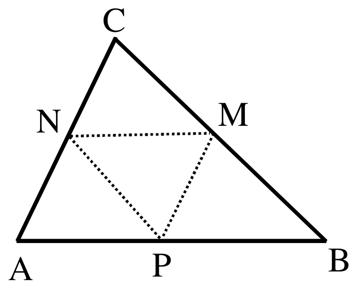
Además, puedes responder la pregunta aplicando propiedades de la semejanza de figuras, como se hizo en la Estrategia 2, en la que se aplicó la relación que hay entre las áreas de figuras semejantes.

En la resolución de este problema no contextualizado debes aplicar propiedades geométricas, en este caso de la semejanza de figuras geométricas, reconociendo los elementos correspondientes entre ambas figuras.

PREGUNTA 44

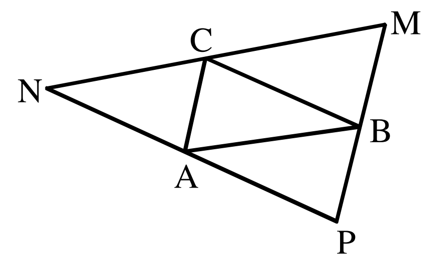
¿Cuál(es) de las siguientes semejanzas es (son) verdadera(s)?

I) $\Delta\, ABC \sim \Delta\, MNP$



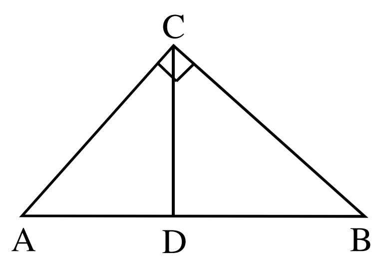
M, N y P son los puntos medios de los lados del $\Delta\, ABC$.

II) $\Delta\, ABC \sim \Delta\, MNP$



$\overline{MN} \,/\!/\, \overline{AB}$, $\overline{NP} \,/\!/\, \overline{CB}$ y $\overline{PM} \,/\!/\, \overline{AC}$

III) $\Delta\, ABC \sim \Delta\, CBD$



$\overline{CD} \perp \overline{AB}$

A) Solo I
B) Solo I y II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

Estrategia de resolución

Para resolver este problema, tienes que verificar la veracidad de las semejanzas de los triángulos planteados en I), en II) y en III).

En la información entregada en I) se dice que M, N y P son puntos medios de los lados del $\Delta\ \mathrm{ABC}$, por lo que tienes que $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}$, es decir, dos de los lados de los $\Delta\ \mathrm{ABC}$ y $\Delta\ \mathrm{PBM}$ son proporcionales.

Además, estos triángulos tienen el $\measuredangle\mathrm{ABC}$ común, lo que te permite concluir que el $\Delta\ \mathrm{ABC}$ y el $\Delta\ \mathrm{PBM}$ son semejantes, con razón de semejanza $1 : 2$ por el criterio de semejanza LAL.

Puedes realizar el mismo análisis con los $\Delta\ \mathrm{APN}$ y $\Delta\ \mathrm{NMC}$, concluyendo que el $\Delta\ \mathrm{ABC}$ es semejante al $\Delta\ \mathrm{ANP}$ y al $\Delta\ \mathrm{CNM}$, con razón de semejanza $1 : 2$.

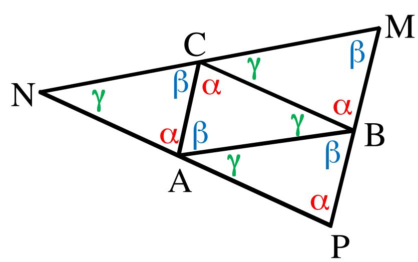
Como el $\Delta\ \mathrm{ABC}$ es semejante al $\Delta\ \mathrm{PBM}$, al $\Delta\ \mathrm{APN}$ y al $\Delta\ \mathrm{NMC}$, con razón de semejanza $1 : 2$, tienes que $\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{CA}} = \frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{CB}} = \frac{1}{2}$ y por el criterio LLL llegas a que el $\Delta\ \mathrm{ABC}$ y el $\Delta\ \mathrm{MNP}$ son semejantes. Entonces, la semejanza dada en I) es verdadera.

Debes verificar ahora la semejanza dada en la figura II).

Dado que $\overline{\mathrm{AC}} \,//\, \overline{\mathrm{PM}}$, tienes que $\measuredangle\mathrm{NAC} = \measuredangle\mathrm{NPM}$ y que $\measuredangle\mathrm{NCA} = \measuredangle\mathrm{NMP}$, por lo tanto, el $\Delta\ \mathrm{NPM}$ y el $\Delta\ \mathrm{NAC}$ son semejantes por el criterio de semejanza de triángulos AA.

Al realizar el mismo análisis con el $\Delta\mathrm{CBM}$ y el $\Delta\ \mathrm{APB}$, puedes concluir que el $\Delta\ \mathrm{NPM}$ también es semejante con el $\Delta\ \mathrm{CBM}$ y el $\Delta\ \mathrm{APB}$.

Considerando las semejanzas de los triángulos antes mencionados y que los ángulos interiores de un triángulo suman $180°$, puedes representar en la figura respectiva los ángulos equivalentes, como se muestra a continuación:



En esta figura tienes que $\measuredangle\ \mathrm{CAB} = \beta$, pues $\measuredangle\ \mathrm{NAC} + \measuredangle\ \mathrm{CAB} + \measuredangle\ \mathrm{CAP} = 180°$. Por la misma razón, $\measuredangle\ \mathrm{BCA} = \alpha$ y $\measuredangle\ \mathrm{ABC} = \gamma$. Así, en la figura puedes ver que $\Delta\ \mathrm{ABC} \sim \Delta\ \mathrm{MNP}$ por el criterio de semejanza de triángulos AA.

Por último, debes determinar la veracidad de la semejanza dada en la figura III).

Los $\Delta\ \mathrm{ABC}$ y $\Delta\ \mathrm{CBD}$ tienen dos pares de ángulos iguales:

- $\measuredangle\mathrm{ABC} = \measuredangle\ \mathrm{CBD}$ (ángulo común a ambos triángulos)
- $\measuredangle\ \mathrm{CDB} = \measuredangle\ \mathrm{ACB}$ (ángulos que miden $90°$)

Luego, por el criterio AA de semejanza, tienes que el $\Delta\ \mathrm{ABC}$ y el $\Delta\ \mathrm{CBD}$ son semejantes, por lo que la semejanza dada en III) es verdadera.

Como las semejanzas dadas en I), en II) y en III) son verdaderas, la respuesta correcta es la opción E).

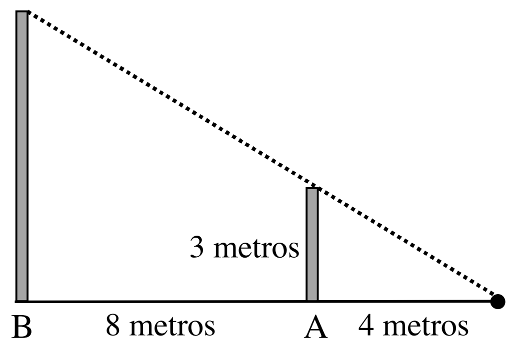
¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responderla, debes tener conocimientos básicos de los elementos de la geometría, como lo que significa punto medio de un segmento, rectas paralelas, rectas perpendiculares y propiedades de ángulos. Pero fundamentalmente, debes tener la capacidad de relacionar los elementos con los que cuentas en cada una de las figuras para determinar la veracidad de las semejanzas de los triángulos planteados, pues estas son las que te permiten aplicar los criterios de semejanza de triángulos.

Así, al resolver este problema geométrico, es importantísimo que interpretes la información de los triángulos dados y representes en ellos los datos que te permitan establecer las relaciones entre los ángulos y los lados de estos triángulos.

PREGUNTA 45

Un profesor plantea la siguiente situación: dos postes verticales, A y B, están a una distancia de $4\ \mathrm{m}$ y $12\ \mathrm{m}$, respectivamente, de una estaca enterrada en el suelo. De esta sale un cable recto que la une con las cimas de los postes, como se representa en la siguiente figura.



El profesor solicita a Marcela que determine la altura del poste B. Ella realiza el siguiente procedimiento:

Paso 1: considera que con los datos del ejercicio se puede plantear la igualdad $\dfrac{3}{4} = \dfrac{\text{altura poste B}}{8}$.

Paso 2: multiplica por 8 en ambos lados de la igualdad, obteniendo $\dfrac{3 \cdot 8}{4} = \text{altura poste B}$.

Paso 3: realiza la operatoria, obteniendo que la altura del poste B es $6\ \mathrm{m}$.

¿En qué paso Marcela cometió un error?

A) En el Paso 1

B) En el Paso 2

C) En el Paso 3

D) En ninguno de ellos

Estrategia de resolución

Para resolver este problema, tienes que verificar, en orden, cada uno de los pasos del procedimiento realizado por Marcela y determinar en cuál de ellos pudo haber cometido un error.

Así, al analizar el Paso 1, puedes notar que la proporción dada $\frac{3}{4} = \frac{\text{altura poste B}}{8}$ no es correcta. Al aplicar el teorema de Thales, debió escribir $\frac{3}{4} = \frac{\text{altura poste B}}{8 + 4}$.

Como hay un error en el Paso 1, la opción A) es la respuesta correcta y no necesitas analizar el resto de los pasos realizados por Marcela.

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Esta es una pregunta en que debes analizar los pasos dados para la resolución de un problema de manera que determines si hay algún error en alguno de ellos.

En este caso, debes analizar los pasos realizados por Marcela para determinar la altura de un poste, para lo cual utilizó el teorema de Thales, que le permitió establecer una proporción entre los segmentos involucrados en la representación de la situación dada en el problema, la cual fue errónea.

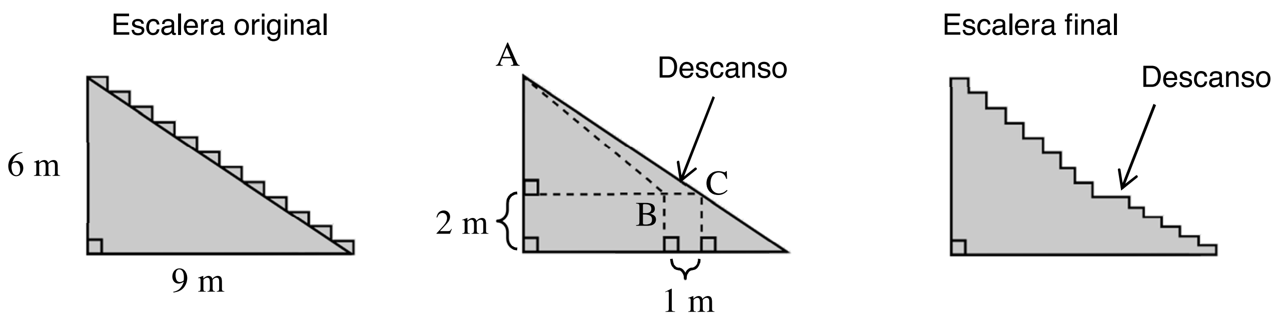
Si no conoces el teorema de Thales, puedes establecer que la proporción usada por Marcela es errónea reconociendo que los triángulos de la representación son semejantes y planteando las razones entre los lados correspondientes de estos triángulos.

De esta manera, para contestar la pregunta debes haber desarrollado principalmente las habilidades de Representar y de Argumentar.

PREGUNTA 46

Una empresa constructora debe modificar la escalera recta de un edificio para incorporarle un descanso de $1\ \mathrm{m}$.

Al hacer un corte transversal a la escalera, lo que se debe eliminar está representado en un triángulo (ABC) para luego añadirle los peldaños, tal como se representa en la siguiente figura:



Para poder hacer el descanso con las especificaciones de la figura, ¿cuál debe ser la medida de $\overline{\mathrm{AB}}$?

A) $\dfrac{\sqrt{117}}{2}\ \mathrm{m}$

B) $\sqrt{41}\ \mathrm{m}$

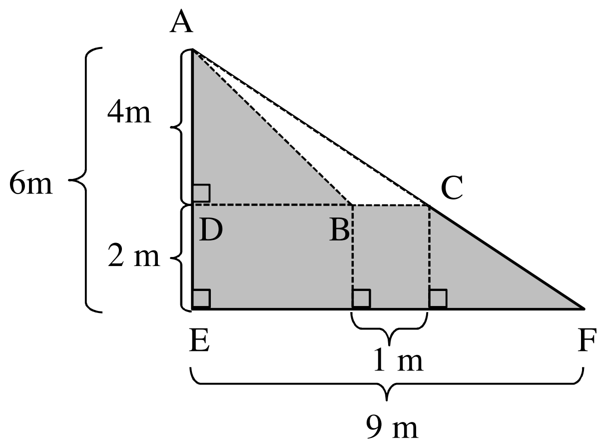
C) $\dfrac{2\sqrt{117}}{3}\ \mathrm{m}$

D) $\sqrt{52}\ \mathrm{m}$

Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: usar semejanza de triángulos.

Para determinar la medida del segmento AB que permita modificar la escalera, puedes generar un solo diagrama con toda la información. Para ello, debes completar el diagrama presentado al centro con la información dada en el enunciado y en el primer diagrama, asignándoles letras a los vértices de los triángulos de manera conveniente. Esto te ayudará a aplicar semejanza de triángulos, como se muestra a continuación:



Así puedes ver que se cumple que $\Delta\,\mathrm{AEF} \sim \Delta\,\mathrm{ADC}$ por el criterio AA, ya que ambos tienen un ángulo de $90°$ y un ángulo en común (ángulo EAF).

De esta semejanza de triángulos puedes escribir la proporción $6 : 9 = 4 : \mathrm{DC}$, de la que obtienes que $\mathrm{DC} = 6\ \mathrm{m}$ y que $\mathrm{DB} = 6\ \mathrm{m} - 1\ \mathrm{m} = 5\ \mathrm{m}$.

Como $\mathrm{AD} = 4\ \mathrm{m}$ y $\mathrm{DB} = 5\ \mathrm{m}$, puedes determinar la medida de $\overline{\mathrm{AB}}$ aplicando el teorema de Pitágoras de la siguiente manera:

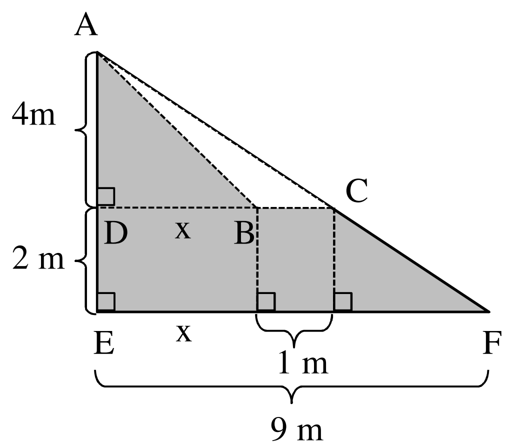
$$\mathrm{AB} = \sqrt{4^2 + 5^2}\ \mathrm{m} = \sqrt{41}\ \mathrm{m}$$

La respuesta correcta es la opción B).

Estrategia 2: usar áreas de figuras planas.

Otra manera que tienes para resolver este problema es usar áreas de figuras geométricas y aplicar el teorema de Pitágoras.

Si consideras la misma figura de la Estrategía 1, puedes plantear la siguiente igualdad:



$$\text{Área } \Delta\, AEF = \text{área } \Delta\ ADC + \text{área trapecio } EFCD$$

$$\frac{6 \cdot 9}{2} = \frac{(x+1) \cdot 4}{2} + \frac{(x+1+9) \cdot 2}{2}$$

Luego, al resolver esta ecuación obtienes que el valor de x es $5\ m$.

Ahora puedes aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo ADB y obtener que:

$$AB = \sqrt{4^2 + 5^2}\ m = \sqrt{41}\ m$$

La respuesta correcta es la opción B).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

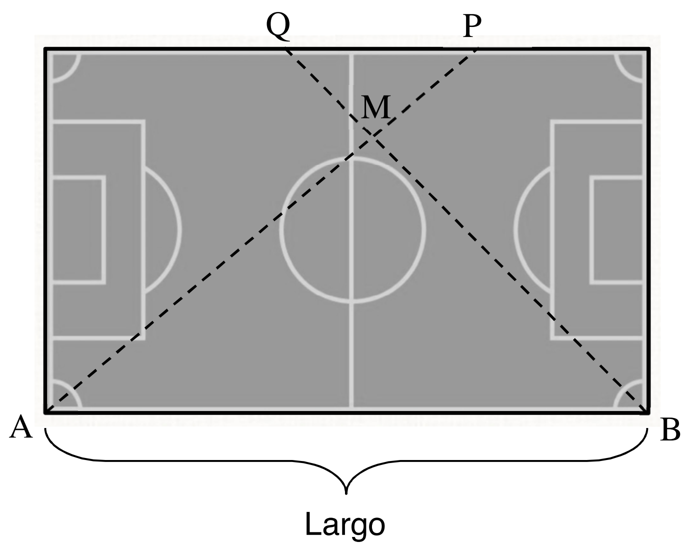
Como puedes ver, en este problema lo primero que debes hacer es comprender e identificar los datos dados tanto en el enunciado como en la figura para plantear relaciones entre ellos. Para que visualices estas relaciones, es útil concentrar la información en una sola figura, como se hizo en este caso al utilizar el diagrama del centro.

Luego, debes establecer las relaciones que te permitan obtener la medida del segmento DB, necesaria para aplicar el teorema de Pitágoras y encontrar la medida del segmento AB solicitada en la pregunta. Para ello, tienes varios caminos; por ejemplo, utilizar la semejanza de triángulos (Estrategia 1) o usar el área de figuras geométricas (Estrategia 2).

Así, en esta pregunta es fundamental que hayas desarrollado la habilidad de Representar, ya que desde la representación debes buscar la mejor estrategia de resolución para resolver el problema.

PREGUNTA 47

La siguiente figura representa una cancha rectangular de $36\ \text{m}$ de largo.



Una persona ubicada en la esquina A envía un balón en línea recta a ras de piso a otra persona situada en el punto P a $32\ \text{m}$ de distancia, mientras que las personas ubicadas en la esquina B y en el punto Q realizan el mismo ejercicio con otro balón. En cierto instante los balones chocan en el punto M.

Las personas situadas en P y Q están en el mismo borde de la cancha y el balón enviado desde A recorre $24\ \text{m}$ hasta el choque.

¿Qué distancia separa a las personas ubicadas en P y en Q?

A) $5{,}\overline{3}\ \text{m}$

B) $9\ \text{m}$

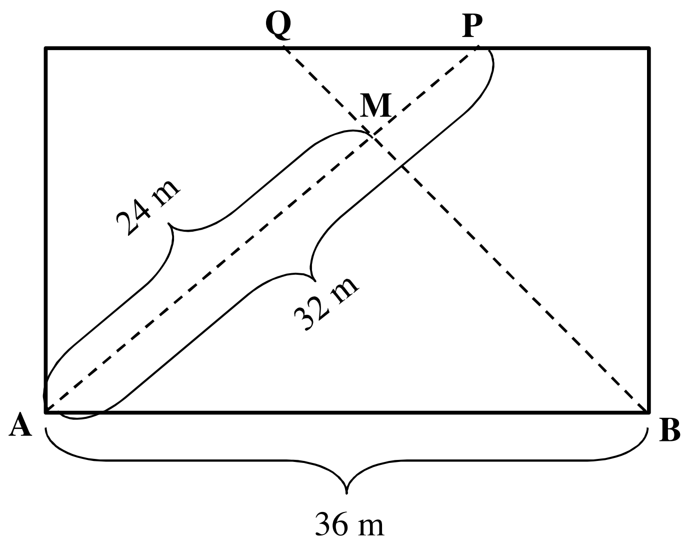
C) $12\ \text{m}$

D) $27\ \text{m}$

Estrategias de resolución

Estrategia 1: usar el teorema de Thales.

Para encontrar la distancia que separa a las personas ubicadas en P y en Q, puedes empezar poniendo en la figura los datos dados en el enunciado, como se muestra a continuación:



Del diagrama anterior puedes concluir que:

$$MP = AP - AM = 32m - 24\ m = 8\ m$$

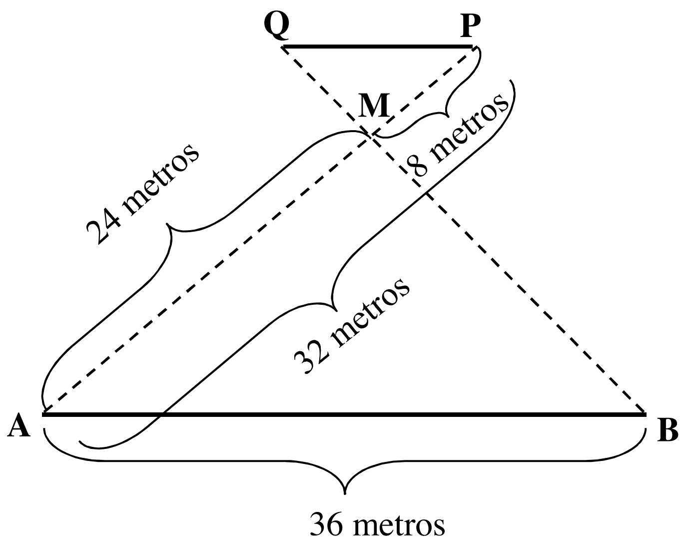
Como $\overline{AB} \,//\, \overline{QP}$, ya que la cancha es rectangular, puedes aplicar el teorema de Thales, de tal manera que obtienes la proporción $\dfrac{PQ}{8\ m} = \dfrac{36\ m}{24\ m}$ y al despejar PQ tienes que $PQ = 12\ m$.

La respuesta correcta es la opción C).

Estrategia 2: usar la semejanza de triángulos.

Otra manera que tienes para determinar la distancia entre las personas ubicadas en P y en Q, es a través de la semejanza de triángulos.

Para seguir esta estrategia debes ubicar en la figura los datos dados en el enunciado, como se muestra a continuación:



De esta forma, tienes que $\Delta\ \mathrm{PQM} \sim \Delta\ \mathrm{ABM}$ por el criterio AA de semejanza de triángulos, ya que $\measuredangle\ \mathrm{QMP} = \measuredangle\ \mathrm{BMA}$ por ser ángulos opuestos por el vértice y $\measuredangle\ \mathrm{QPM} = \measuredangle\ \mathrm{BAM}$ al ser ángulos alternos internos entre paralelas. Luego, como los lados de los triángulos semejantes son proporcionales, puedes escribir la igualdad $\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{PM}} = \dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AM}}$, y al reemplazar por las medidas respectivas, obtienes $\dfrac{\mathrm{QP}}{8\ \mathrm{m}} = \dfrac{36\ \mathrm{m}}{24\ \mathrm{m}}$.

Por último, al despejar QP, obtienes que $\mathrm{QP} = 12\ \mathrm{m}$.

La respuesta correcta es la opción C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Como puedes ver en ambas resoluciones, lo primero que debes saber hacer es interpretar y ubicar en la figura los datos dados en el enunciado, acción que es de mucha utilidad al momento de resolver problemas geométricos.

Luego, tienes que determinar una relación entre los lados de los triángulos de la figura que te permita encontrar la medida del segmento QP. Para encontrar esta relación puedes seguir distintos caminos. Uno de ellos es aplicando el teorema de Thales, como en la Estrategia 1. Si no conoces este teorema, puedes usar la relación que hay entre los lados correspondientes de dos triángulos semejantes, como se hizo en la Estrategia 2. Por último, para responder la pregunta, debes saber resolver una ecuación lineal simple con coeficientes enteros.

Para ambas estrategias necesitas haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas y de Representar.

PREGUNTA 48

Un mapa está hecho a escala de $1:1.000.000$.

¿Cuál es la distancia real que hay entre dos ciudades si en el mapa esta distancia es de 30 cm ?

A) $0{,}3 \text{ km}$

B) 30 km

C) 300 km

D) 3.000 km

Estrategia de resolución

Para encontrar la distancia real entre dos ciudades que en el mapa están a 30 cm de distancia, puedes aplicar una proporción con la escala dada en el mapa. En este caso $\frac{1}{1.000.000} = \frac{30}{x}$, en la que x es la distancia que estás buscando. Si resuelves la ecuación, obtienes que las ciudades se encuentran a $30.000.000 \text{ cm}$.

Para transformar esta distancia a kilómetros, debes considerar que $1 \text{ km} = 100.000 \text{ cm}$. De esta manera, la distancia real en kilómetros entre las dos ciudades la puedes determinar resolviendo $\frac{30.000.000}{100.000} \text{ km} = 300 \text{ km}$.

La respuesta correcta es la opción C).

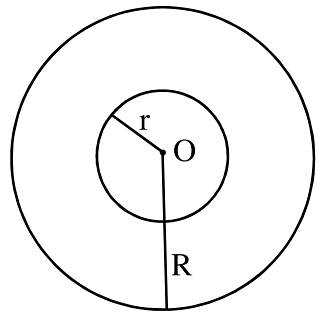
¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para encontrar la distancia entre las dos ciudades según las condiciones dadas en el enunciado, tienes que saber interpretar modelos a escala, además de resolver una ecuación lineal simple y escribir una cantidad en distintas unidades de medida.

Este problema plantea una situación rutinaria, en la que debes realizar cálculos numéricos directos e interpretar un modelo que permita traspasar medidas reales a una representación semejante a la realidad, como lo es un mapa.

PREGUNTA 49

A la circunferencia de centro O y radio R se le aplica una homotecia con centro O, obteniéndose una circunferencia de centro O y radio r, con $\mathrm{R} > \mathrm{r}$, tal como se muestra en la figura adjunta.



¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La razón de homotecia es distinta de 1.

II) La razón de homotecia puede ser negativa.

III) Si se conoce la razón de homotecia, entonces se conoce la razón entre sus radios.

A) Solo I

B) Solo I y II

C) Solo I y III

D) Solo II y III

E) I, II y III

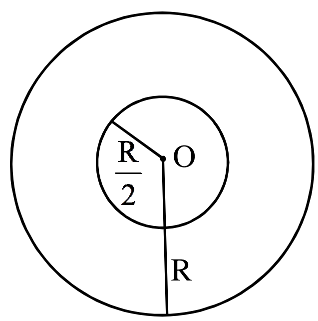
Estrategia de resolución

Para determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III), tienes que revisarlas aplicando los conceptos y propiedades de homotecia de figuras planas.

Del enunciado y de la figura tienes que la circunferencia de radio r es la imagen de la circunferencia de radio R luego de aplicar una homotecia de centro O, en la que ambas circunferencias son concéntricas.

En I) se dice que la razón de homotecia es distinta de 1, lo que es verdadero, pues si la razón de homotecia fuera 1, se debiese cumplir que $\frac{R}{r} = 1$, obteniendo que $R = r$, lo que contradice lo planteado en el enunciado de que $R > r$.

La afirmación dada en II) acerca de que la razón de homotecia puede ser negativa también es verdadera. Esto, porque si consideras, por ejemplo, que la razón de homotecia es $-\frac{1}{2}$, obtienes la siguiente figura:



Por último, para evaluar si al conocer la razón de homotecia se conoce la razón entre sus radios, debes recordar que la imagen de un segmento por una homotecia de centro O y razón k es un segmento que tiene $|k|$ veces su longitud.

En este caso, $k \cdot R = r$, luego $k = \frac{r}{R}$, es decir, se cumple lo planteado, por lo que la afirmación dada en III) es verdadera.

Por el desarrollo anterior, puedes concluir que la respuesta correcta es la opción E).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para confirmar la veracidad de cada una de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III), tienes que saber las propiedades de la homotecia. Además, puedes usar distintas estrategias utilizadas en matemática para determinar la veracidad de las afirmaciones, como suponer de antemano la verdad de una afirmación y ver si a partir de ella se obtiene una relación cierta o una contradicción, como se hizo en I).

Por otra parte, puedes emplear ejemplos que te permitan establecer que una relación se puede dar para algunos casos, como se realizó en II). O bien, utilizar el significado de un concepto, modelando las relaciones que se pueden establecer, como se hizo en III).

PREGUNTA 50

Sean $A(1, 1)$, $B(5, 3)$ y C los vértices de un triángulo.

Se pueden determinar las coordenadas del vértice C del triángulo si se sabe que:

(1) $\measuredangle BAC = 90°$

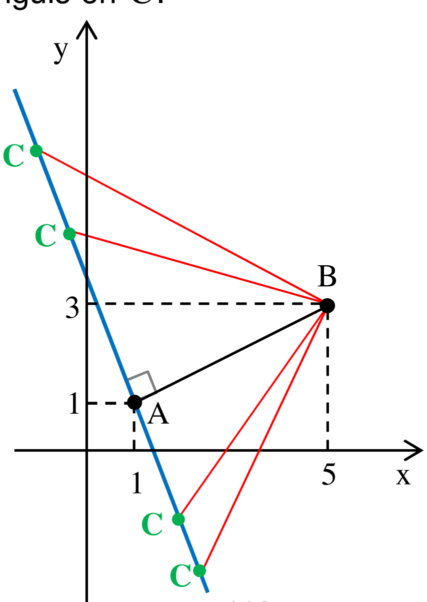
(2) el triángulo es isósceles y el vértice C está en el cuarto cuadrante.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Estrategia de resolución

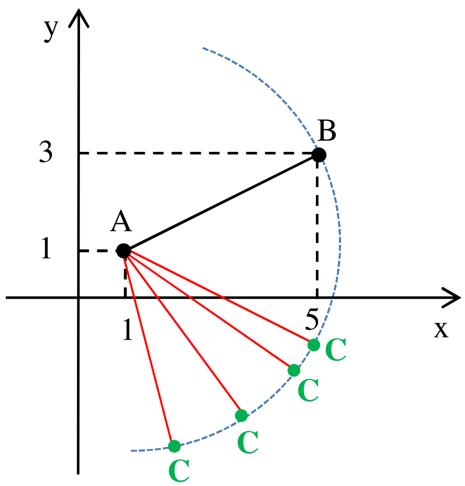
Para verificar si las informaciones dadas en (1) y/o en (2) son suficientes para determinar las coordenadas del vértice C del triángulo, puedes apoyarte de gráficos para facilitar la visualización. En ella, en primer lugar debes ubicar los puntos $A(1, 1)$ y $B(5, 3)$.

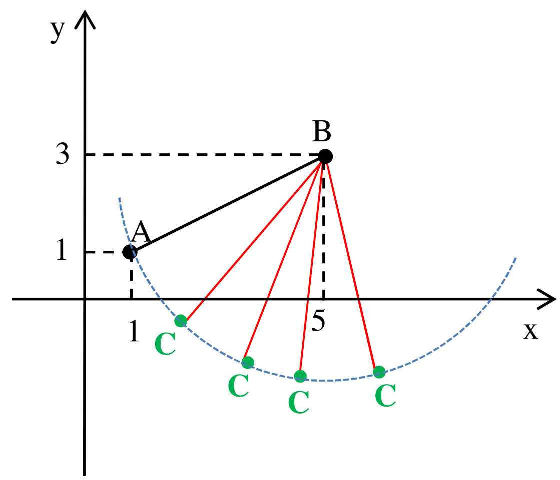
Con la información dada en (1), en la que se indica que $\measuredangle BAC = 90°$, puedes ubicar el punto C en infinitas posiciones, que corresponden a los puntos de la recta dibujada en azul en el siguiente gráfico, cumpliéndose la condición de que el triángulo ABC es rectángulo en C.



Te puedes dar cuenta en el gráfico anterior que hay más de un punto que cumple dicha condición, por lo que no se pueden identificar las coordenadas del punto C. Por lo tanto, la información dada en (1) no es suficiente para responder la pregunta.

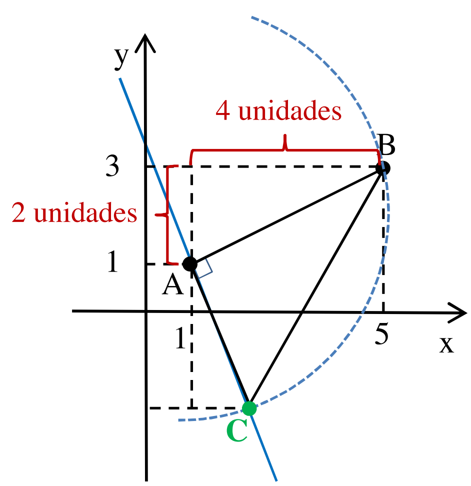
Por otro lado, si consideras la información dada en (2), en la que tienes que el vértice C está en el cuarto cuadrante y que el triángulo ABC es isósceles, puedes construir dos gráficos, uno en que se cumpla que $AB = AC$, y otro en que se cumpla que $AB = BC$, como se muestra a continuación:





A partir de los gráficos puedes concluir que todos los puntos que pertenecen a los arcos de circunferencia y que están en el cuarto cuadrante cumplen con las condiciones dadas en (2), por lo que no se pueden identificar las coordenadas del punto C. De esta manera, la información dada en (2) no es suficiente para responder la pregunta.

Por último, si consideras ambas informaciones, (1) y (2), es decir, que el triángulo es rectángulo en el vértice A, que es isósceles, y que el vértice C está en el cuarto cuadrante, de tal manera que $\overline{BC}$ sea su hipotenusa, puedes hacer el siguiente gráfico:



En el gráfico anterior tienes que los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del triángulo rectángulo en A tienen igual medida, lo que te permite determinar las coordenadas del vértice C del $\Delta\ ABC$.

Como con ambas informaciones puedes determinar lo solicitado, la respuesta correcta es C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Este problema pone de manifiesto tu capacidad para analizar los datos del problema y evaluar si es posible encontrar un punto en el plano cartesiano a partir de las informaciones dadas en (1) y en (2). Para ello, debes ponerte en todos los casos que se presentan y establecer qué puntos cumplen con las condiciones entregadas.

Una manera de responder esta pregunta es que realices un bosquejo de la situación usando las condiciones dadas en (1), y luego las dadas en (2), como se mostró en esta estrategia. Así, resulta más sencillo y más breve que realizar un procedimiento algebraico. En este caso, como con las informaciones dadas en (1) y en (2) por separado no se puede encontrar lo solicitado, puedes hacer un bosquejo que reúna todas las condiciones entregadas en el problema.

Para lo anterior, debes saber ubicar puntos en el plano cartesiano, identificar cuál es el cuarto cuadrante, conocer las características que tiene un triángulo isósceles y representar un ángulo recto y segmentos de igual medida.

Las habilidades que debes haber desarrollado para este tipo de preguntas son las de Representar y de Argumentar.

PREGUNTA 51

En la tabla adjunta se muestra la distribución de la escala de valoración de las notas de los estudiantes de un curso.

Escala de valoración	Notas	Cantidad de estudiantes
Insuficiente	$[1, 4[$	9
Suficiente	$[4, 5[$	16
Bueno	$[5, 6[$	5
Muy Bueno	$[6, 7]$	6

¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se deduce de la tabla?

A) Hay 11 estudiantes que obtuvieron una nota mayor o igual que 5.

B) La valoración Suficiente fue la de mayor frecuencia.

C) Un $25\ \%$ de los estudiantes fue valorado con un Insuficiente.

D) Por lo menos un estudiante consiguió nota 7.

E) Hay 27 estudiantes que lograron a lo menos un 4.

Estrategia de resolución

Una manera que tienes para responder a la pregunta es analizar cada una de las opciones y ver cuál de ellas no se puede deducir de la información dada en la tabla y en el enunciado.

En la opción A) se menciona que hay 11 estudiantes que obtuvieron una nota mayor o igual que 5, lo que puedes determinar sumando las frecuencias de las dos últimas filas de la tabla, como se muestra a continuación:

Escala de valoración	Notas	Cantidad de estudiantes
Insuficiente	$[1, 4[$	9
Suficiente	$[4, 5[$	16
Bueno	$\boxed{[5, 6[}$	$\boxed{5}$
Muy Bueno	$\boxed{[6, 7]}$	$\boxed{6}$

$$\boxed{5 + 6 = 11}$$

Por lo tanto, de la información sí se puede deducir que 11 estudiantes obtuvieron una nota mayor o igual que 5 y puedes descartar la opción A).

Si observas la tabla, puedes concluir que la afirmación dada en B) es verdadera, ya que la valoración Suficiente es la que tiene la mayor frecuencia, como se muestra a continuación:

Escala de valoración	Notas	Cantidad de estudiantes
Insuficiente	$[1, 4[$	9
Suficiente	$[4, 5[$	16
Bueno	$[5, 6[$	5
Muy Bueno	$[6, 7]$	6

Para analizar la afirmación dada en C), tendrás que verificar si los 9 estudiantes que obtuvieron una escala Insuficiente equivalen al $25\ \%$ de la cantidad total de los estudiantes del curso. Para ello, debes sumar todas los valores de la columna de la cantidad de estudiantes, llegando a $9 + 16 + 5 + 6 = 36$ estudiantes. Luego, puedes resolver la ecuación $\dfrac{100\ \%}{x} = \dfrac{36}{9}$, en la que x representa el porcentaje que es 9 de 36, llegando a $x = 25\ \%$. Por lo anterior, tienes que la afirmación en C) es verdadera.

Con respecto a la afirmación dada en D), no es posible deducirla. En la tabla puedes ver que hay 6 estudiantes cuya nota pertenece al intervalo $[6, 7]$, pero no puedes concluir que uno de ellos tenga una nota 7, pues, por ejemplo, los 6 estudiantes podrían haber obtenido una nota 6.

Por último, en la opción E) debes determinar la cantidad de estudiantes que lograron a lo menos un 4. Esto lo puedes hacer utilizando el siguiente procedimiento:

Escala de valoración	Notas	Cantidad de estudiantes
Insuficiente	$[1, 4[$	9
Suficiente	$[4, 5[$	16
Bueno	$[5, 6[$	5
Muy Bueno	$[6, 7]$	6

Estudiantes con a lo menos un 4: $16 + 5 + 6 = 27$

Así, te puedes dar cuenta de que la afirmación dada en E) es verdadera.

Por el desarrollo anterior, la afirmación que no puedes deducir de la tabla es la opción D), siendo esta la opción correcta.

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

En este caso es fundamental entender e interpretar la información entregada en la tabla de la pregunta, reconociendo que la cantidad de estudiantes por intervalo corresponde a la frecuencia de estos. Además, debes saber interpretar los intervalos que aparecen en dicha tabla para determinar cuáles de ellos son los que se requieren considerar para analizar algunas de las afirmaciones dadas en las opciones.

Junto con lo anterior, requieres saber operar con números enteros y aplicar conocimientos básicos de porcentaje para evaluar las afirmaciones dadas en las opciones.

Así, debes haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas y de Representar para responder la pregunta.

Pregunta 52

El dinero que tienen reunido en total tres amigas es $\$210.000$. Se sabe que Claudia aportó el doble que María, y que Yasna aportó el doble que Claudia.

¿Cuál es el promedio del dinero aportado por Claudia y Yasna?

A) $\$90.000$

B) $\$70.000$

C) $\$45.000$

D) $\$35.000$

Estrategia de resolución

Para resolver el problema y determinar el promedio del dinero aportado por Claudia y Yasna a lo reunido por las tres amigas, puedes plantear y resolver una ecuación de primer grado.

Si asignas por P a lo que aporta María, tienes que Claudia aporta $2P$ y Yasna $4P$ de acuerdo a las relaciones planteadas en el enunciado. Como se sabe que entre las tres amigas tienen $7P = \$210.000$, al despejar obtienes que $P = \$30.000$.

Si reemplazas este valor en las expresiones que representan los aportes de Claudia y Yasna, tienes que estas aportan $\$60.000$ y $\$120.000$, respectivamente.

Con respecto a lo que aportan en promedio estas dos amigas, tienes que el valor es $\dfrac{\$60.000 + \$120.000}{2} = \dfrac{\$180.000}{2} = \$90.000$.

La respuesta correcta es la opción A).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Este problema presenta una situación en la que debes establecer el dinero que aporta cada una de las amigas para determinar el promedio que aportan dos de ellas.

Para ello, debes representar la situación planteada a través de una ecuación de primer grado y determinar la cantidad de dinero que aporta cada amiga. Luego, tienes que obtener el promedio a partir de una operatoria básica de números enteros, como se hizo en la estrategia presentada.

Así, para responder esta pregunta, debes haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas y de Representar.

PREGUNTA 53

En la siguiente tabla se muestra la distribución de las edades, en años, de un grupo de niños:

Edad	Frecuencia
2	5
3	6
4	9
5	3

¿Cuál es la mediana de la edad de este grupo de niños?

A) $3{,}5$ años

B) 4 años

C) $7{,}5$ años

D) 9 años

Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: listar los datos de la tabla.

Lo primero que tienes que saber para resolver este problema es recordar que la mediana de un grupo impar de datos corresponde al valor central de todos los datos cuando estos están ordenados de menor a mayor.

Luego, si presentas los datos de la tabla ya ordenados de menor a mayor, puedes ver que el término central es el que aparece marcado con un óvalo:

$$\underbrace{2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3}_{11 \text{ datos}}, 4, \underbrace{4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5}_{11 \text{ datos}}$$

Entonces, la mediana de la edad de este grupo de niños es 4 años.

La respuesta correcta es la opción B).

Estrategia 2: usar la frecuencia acumulada.

Otra manera que tienes para resolver el problema es que agregues a la tabla una columna con la frecuencia acumulada de cada dato, ya que con los valores de esta podrás determinar la edad que ocupa la posición central.

Edad	Frecuencia	Frecuencia acumulada
2	5	5
3	6	11
4	9	20
5	3	23

Como el total de datos es 23, número impar, el término central es el que está ubicado en la posición $\frac{23+1}{2} = 12$, luego puedes concluir de la tabla que 11 niños tienen a lo más 3 años. Por lo tanto, el dato que ocupa la posición 12 es 4 años.

La respuesta correcta es la opción B).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responder esta pregunta, tienes que saber el concepto de mediana de un grupo de datos para aplicarlo a la determinación de esta medida de las edades de un grupo de niños cuyos valores están presentados en una tabla de frecuencias. Esto lo puedes realizar de más de una manera. Lo primero que requieres es determinar la cantidad total de datos, reconociendo que esta corresponde a un número impar.

Así, si observas la tabla tienes que la cantidad de datos involucrados en el problema son pocos, lo que te permite listarlos ordenadamente y visualizar de una forma muy directa cuál es la edad que ocupa la pocisión central de los datos, como se realizó en la Estrategia 1.

Por otro lado, también puedes utilizar tus conocimientos de análisis de datos representados en tablas, ya que la obtención de la frecuencia acumulada de cada uno de los datos te permite visualizar en cuál de ellos se encuentra el valor central, como aparece en la segunda estrategia utilizada.

Por lo anterior, requieres haber desarrollado las habilidades de Representar y Resolver problemas.

PREGUNTA 54

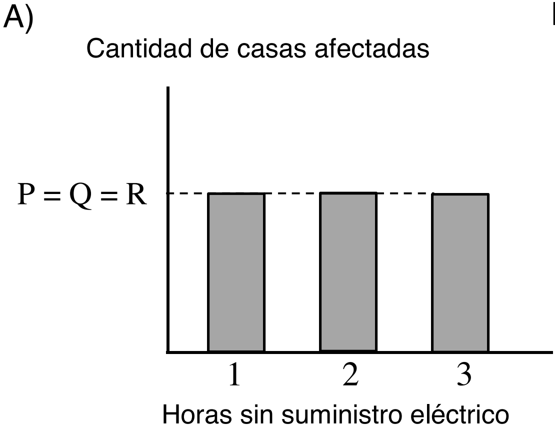
En la tabla adjunta se muestra la distribución de las horas sin suministro eléctrico de un grupo de casas de una villa.

Horas sin suministro eléctrico	Cantidad de casas afectadas
1	P
2	Q
3	R

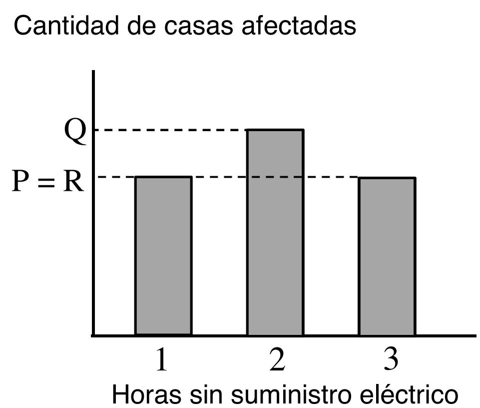
Se sabe que el promedio, la mediana y la moda de las horas sin suministro eléctrico son iguales y que hay un valor único para la moda.

¿Cuál de los siguientes gráficos representa las condiciones dadas en el enunciado?

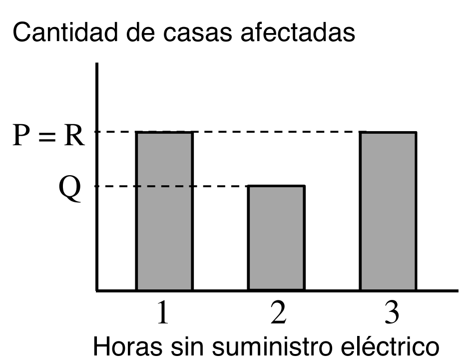
A)



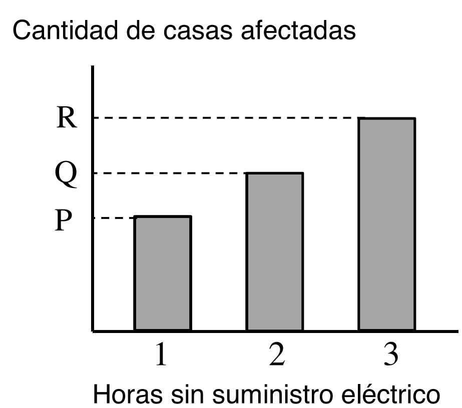
B)



C)



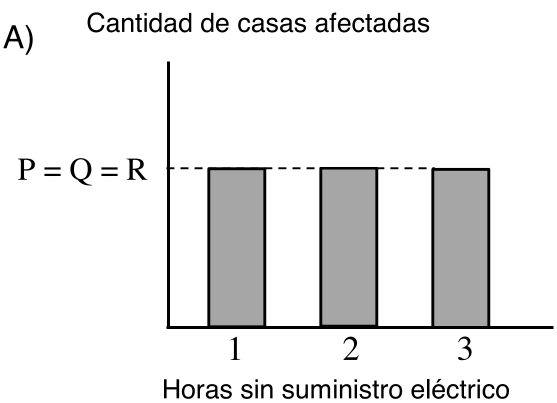
D)



Estrategia de resolución

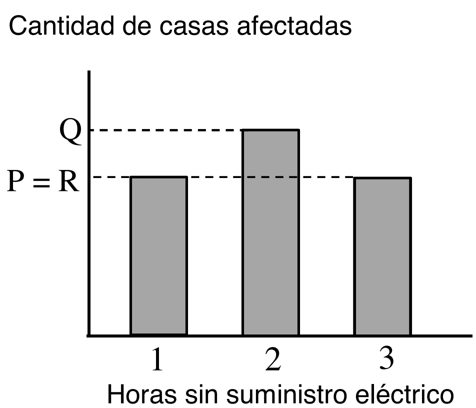
Para resolver el problema, puedes analizar cada uno de los gráficos dados en las opciones y determinar en cuál de ellos se cumple que el promedio, la mediana y la moda son iguales y que hay un valor único para la moda.

A)



Como la cantidad de casas que estuvieron sin suministro eléctrico con 1 hora, 2 horas o 3 horas es igual, no existe un número de casas que sea mayor. En este caso, se cumple que el promedio y la mediana son iguales. Pero no puedes decir que hay un valor único para la moda. Por lo tanto, este gráfico no representa la situación planteada.

B)



En este gráfico puedes observar que la moda es 2 horas, pues es la que tiene mayor frecuencia.

Si Q es número par y $P = R$, entonces $\dfrac{2P+Q}{2} = P + \dfrac{Q}{2}$ será un número entero, por lo que la mediana será el promedio de los datos ubicados en las posiciones $P + \dfrac{Q}{2}$ y $P + \dfrac{Q}{2} + 1$. Como en ambas posiciones está el 2, la mediana es 2 horas.

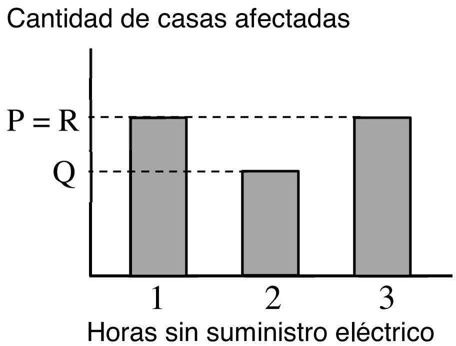
Si Q es número impar y $P = R$, entonces $\dfrac{2P+Q}{2} = P + \dfrac{Q}{2}$ no será un número entero, por lo que la mediana será el dato ubicado en la posición $P + \dfrac{Q}{2}$. En esta posición está el 2, por lo que la mediana es 2 horas.

Por último, el promedio es:

$$\frac{P+2Q+3R}{P+Q+R} = \frac{P+2Q+3P}{P+Q+P} = \frac{2(2P+Q)}{2P+Q} = 2.$$

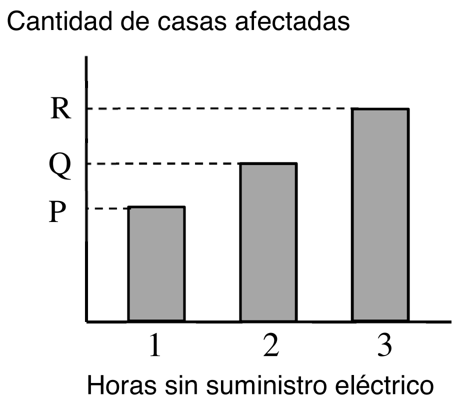
Por lo que, el gráfico de esta opción cumple con las condiciones requeridas en el problema.

C)



En este gráfico puedes ver que la cantidad de casas afectadas de 1 hora y 3 horas sin suministro eléctrico es igual, por lo que no hay un valor único para la moda.

D)



En este gráfico puedes ver que la moda es 3 horas, porque $P < Q < R$.

El promedio está dado por la expresión

$$\frac{P+2Q+3R}{P+Q+R}$$

Si el promedio fuese 3, entonces se debe cumplir $P + 2Q + 3R = 3(P + Q + R)$, de lo que se obtiene que $0 = 2P + Q$ lo cual no puede ocurrir ya que P y Q son números enteros positivos.

Luego, el único gráfico que cumple con las restricciones del problema es el presentado en la opción B), siendo esta la respuesta correcta.

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para resolver este problema, necesitas recordar qué son la moda, la mediana y el promedio y así determinar estas medidas de un grupo de datos presentados en una tabla y en un gráfico de barras.

Para esto, lo primero que debes considerar es la relación que existe entre los datos de la tabla y los datos de los gráficos de barras, identificando los elementos que lo componen.

Luego, debes analizar cada uno de los gráficos hasta encontrar el que representa la situación planteada. Para ello tienes que usar expresiones algebraicas que permitan descartar opciones, como se hizo en la estrategia presentada.

Para poder interpretar la situación planteada, debes haber desarrollado la habilidad de Representar y la habilidad de Resolver problemas.

PREGUNTA 55

Considera un grupo de datos numéricos. Si P es el percentil 45 de estos datos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones se puede deducir?

A) P es mayor al percentil 40 de estos datos.

B) La mediana del grupo de datos es mayor que P.

C) P es menor que el tercer cuartil.

D) La media aritmética del grupo de datos es mayor que P.

E) Ninguna de las anteriores.

Estrategia de resolución

Para responder esta pregunta, debes determinar la veracidad de cada una de las afirmaciones dadas en las opciones.

Puedes considerar un grupo de datos numéricos de tal manera que todos sus elementos sean iguales, por ejemplo, formados solo por el número 1.

En este ejemplo el percentil 45 es igual al percentil 40, por lo que la afirmación dada en A) es falsa.

La mediana, que es el percentil 50, también es igual al percentil 45 en este ejemplo, por lo tanto, la afirmación en B) también es falsa.

Para determinar la veracidad de la afirmación en C), debes recordar que el tercer cuartil corresponde al percentil 75 y en el ejemplo ambos percentiles son iguales, entonces la afirmación en esta opción es falsa.

Lo mismo ocurre con la afirmación dada en D), ya que la media aritmética de los datos en este ejemplo es 1 y es igual al percentil 45.

La respuesta correcta es la opción E).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para resolver este problema debes recordar qué son las medidas de posición. En este caso en particular, recordar los cuartiles y percentiles, además de las medidas de tendencia central, como son la mediana y la media aritmética.

Una vez que hayas identificado los datos del enunciado, puedes considerar contraejemplos para determinar que no necesariamente los percentiles y/o cuartiles tienen valores distintos, como se muestra en la estrategia de resolución. En ella se usó un grupo de datos iguales, cuyo valor asociado a cada medida de posición y cada medida de tendencia central es el mismo.

Por lo anterior, debes haber desarrollado la habilidad de Resolver problemas y de Representar.

PREGUNTA 56

En la tabla adjunta se muestra la distribución del Ingreso Promedio Familiar (IPF) de un grupo de familias en una pequeña localidad, en la que el IPF se calcula como el ingreso total de la familia dividido por el número de integrantes.

IPF en $	Frecuencia
$[0, 50.000[$	100
$[50.000, 75.000[$	70
$[75.000, 150.000[$	50
$[150.000, 250.000[$	20
$[250.000, 500.000[$	10

Para una familia de n integrantes con un ingreso total de $\$300.000$, ¿qué condición debe cumplir n para asegurar que el IPF de esa familia pertenezca al intervalo en el que está el percentil 50 de los datos?

A) $2 < n \leq 4$

B) $0 < n \leq 6$

C) $4 < n \leq 6$

D) $0 \leq n \leq 4$

Estrategia de resolución

Una manera que tienes de resolver el problema es encontrar una expresión para el IPF de la familia de n integrantes con un ingreso total de $\$300.000$. Para ello, debes comprender la definición dada en el enunciado, esto es, el IPF corresponde al ingreso total de la familia dividido por el número de integrantes, es decir, está dado por $\dfrac{300.000}{n}$.

Por otro lado, debes recordar que el percentil 50 de un conjunto de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el $50\ \%$ de los valores son menores o iguales que él y, aproximadamente, el $50\ \%$ de los valores son mayores o iguales que él.

Para determinar el intervalo en que está el percentil 50 de los datos, debes sumar las frecuencias de la tabla, que en este caso es 250. Luego, el percentil 50 se encuentra en el intervalo $\lfloor 50.000, 75.000 \lfloor$, ya que en este se acumula hasta el $50\ \%$ de los datos.

Entonces, el IPF de la familia debe estar en $\lfloor 50.000, 75.000 \lfloor$, es decir, $50.000 \leq \dfrac{300.000}{n} < 75.000$.

Para determinar entre qué valores debe estar n, puedes realizar el siguiente desarrollo:

$$50.000 \leq \frac{300.000}{n} < 75.000$$

multiplicar por $\dfrac{1}{25.000}$

$$2 \leq \frac{12}{n} < 3$$

Para que determines qué valor de n cumple con la condición $2 \leq \dfrac{12}{n}$, puedes probar con distintos valores y llegarás a que los únicos válidos son lo que cumplen con $n \leq 6$. De igual manera, los valores de n que satisfacen la desigualdad $\dfrac{12}{n} < 3$ son $n > 4$.

De ambas desigualdades obtienes la condición que debe cumplir n para satisfacer lo solicitado en el problema, es decir, $4 < n \leq 6$.

La respuesta correcta es la opción C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

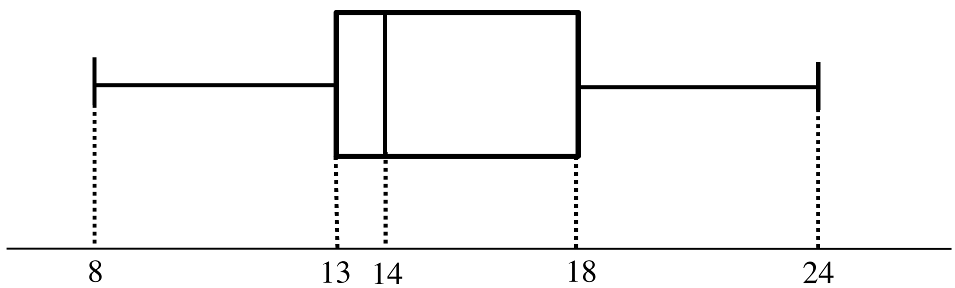
En este problema debes recordar lo que es el percentil 50 de un grupo de datos y tienes que saber interpretar los datos dados en el enunciado, relacionándolos con la información de la tabla. A partir de esto, puedes encontrar una expresión con la que, a través de la valoración de ella por números racionales, determines qué condición debe cumplir n para asegurar que el IPF de esa familia pertenezca al intervalo en el que está el percentil 50 de los datos.

Para esto es fundamental interpretar la definición del IPF y establecer un modelo matemático que permita relacionarlo con el intervalo de la tabla correspondiente al percentil 50 de los datos.

Para lo anterior debes de haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas, Modelar y Representar.

PREGUNTA 57

El diagrama de cajón adjunto representa la distribución de las edades, de un grupo de personas.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones se deduce del gráfico?

A) Las personas menores de 13 años, junto a las mayores de 18 años, equivalen a un $50\ \%$ del grupo.

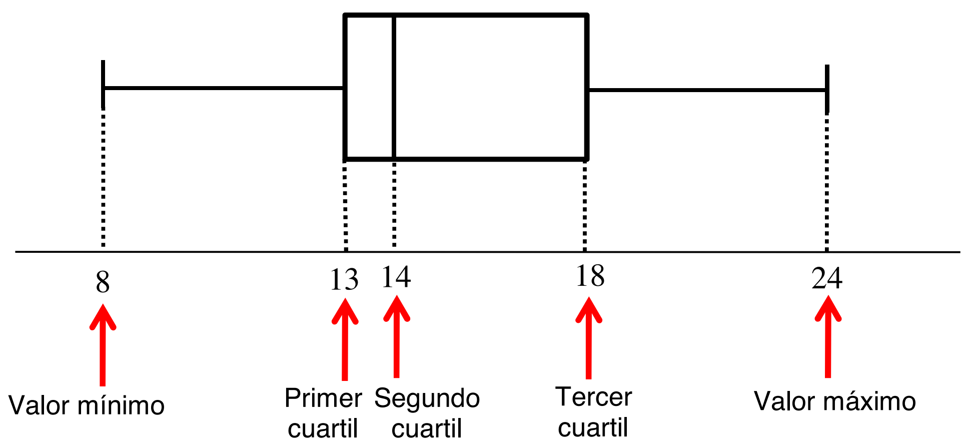
B) Ninguna persona tiene 19 años.

C) Hay solo una persona que tiene 8 años.

D) Al menos hay 5 personas en el grupo.

Estrategia de resolución

Para responder esta pregunta debes comprender que un diagrama de cajón es una manera conveniente de mostrar visualmente la distribución de un grupo de datos numéricos. En este se muestran los cuartiles y los valores mínimo y máximo del grupo de datos.



En la opción A) se afirma que las personas menores de 13 años, junto a las mayores de 18 años, equivalen a un $50\ \%$ de las personas del grupo. Esto no lo puedes deducir, pues la cantidad de personas en este rango es a lo más $50\ \%$ del grupo. Un ejemplo del caso anterior lo puedes expresar imaginando que tienes el siguiente grupo de datos para representar en el diagrama de cajón dado: 8, 8, 10, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 24; en el que 6 personas son parte del rango establecido y esta cantidad es menor que el $50\ \%$ del grupo.

Para evaluar la veracidad de la afirmación de B), en el ejemplo anterior se mostró que entre 18 años y 24 años se ubica a lo más el $25\ \%$ de las personas del grupo, por lo tanto, puede haber una persona que tenga 19 años. Esto implica que la afirmación dada en B) no se puede deducir.

Por otro lado, en la opción C) se plantea que solo hay una persona que tiene 8 años. A partir del gráfico, se sabe que el mínimo dato es 8 años, pero no se puede afirmar que solo una persona tenga esta edad. Esto se ejemplifica en el caso dado en la opción A), por lo tanto, la afirmación dada en C) tampoco se puede deducir.

Con respecto a la afirmación dada en D), considera a 4 personas y que sus edades son P, Q, R y S ordenadas de menor a mayor. Por el diagrama tendrías que $P = 8$ y $S = 24$, y como el primer cuartil es 13 puedes escribir, por ejemplo, la ecuación $\dfrac{8 + Q}{2} = 13$ de la cual obtienes que $Q = 18$, lo que no es posible según este diagrama, pues el segundo dato sería mayor que el segundo cuartil. Lo mismo ocurre no importando el método a utilizar.

Por lo tanto, puedes concluir que por lo menos hay 5 personas en el grupo por las edades que se indican en el diagrama de cajón con el valor mínimo, el valor máximo y tres valores para los tres cuartiles. Por lo tanto, la afirmación en D) es verdadera.

La respuesta correcta es la opción D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para determinar la opción correcta, necesitas entender el problema antes de elegir las herramientas matemáticas que utilizarás. Para ello, debes saber qué representa un diagrama de cajón y a partir de ahí determinar la veracidad de las afirmaciones de las opciones, en las que debes evaluar cuál de ellas se puede deducir de la interpretación del diagrama dado en el enunciado.

Es de gran utilidad que relaciones el diagrama de cajón con un ejemplo de un grupo de datos numérico que se ajuste a los datos dados en el diagrama. Esto te permite visualizar de mejor manera si las deducciones dadas son o no correctas.

Por lo anterior, queda en evidencia que necesitas haber desarrollado habilidades de Resolver problemas y de Representar.

PREGUNTA 58

Al lanzar un dado cargado, numerado del 1 al 6, la probabilidad de que salga un número par es el doble de la probabilidad de que salga un número impar.

Si se lanza este dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número impar?

A) $\frac{1}{9}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{2}{9}$

Algunas estrategias de resolución

Estrategia 1: definir eventos apropiados.

Una manera que tienes para responder la pregunta es definiendo eventos y las probabilidades de obtenerlos.

Así, en el experimento de lanzar un dado cargado se tienen los eventos:

A: obtener un número impar.
B: obtener un número par.

Además, en el enunciado se indica que la probabilidad de que salga un número par es el doble de la probabilidad de que salga un número impar. Entonces, puedes escribir P(A) = x y P(B) = $2x$.

Ambas probabilidades deben sumar 1, por lo tanto, $x + 2x = 1$. Si despejas x en la ecuación, obtienes que $x = \frac{1}{3}$.

Como P(A) = x , puedes concluir que la probabilidad de obtener un número impar es $\frac{1}{3}$.

La respuesta correcta es la opción C).

Estrategia 2: calcular la probabilidad de obtener cada número.

Otra manera que tienes para responder esta pregunta es que te apoyes en una tabla como la siguiente, en la cual se destacan con un óvalo los números impares y su probabilidad.

	Número obtenido al lanzar el dado cargado					
	1	2	3	4	5	6
Probabilidad de obtener el número	x	$2x$	x	$2x$	x	$2x$
Suma de probabilidades	$x + 2x + x + 2x + x + 2x = 1$					
	Al despejar x en la ecuación anterior se obtiene $x = \frac{1}{9}$					
Probabilidad de cada uno	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

Usando los datos de la tabla, puedes calcular que la probabilidad de obtener un número impar al lanzar el dado cargado está dada por $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

La respuesta correcta es la opción C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Al resolver este problema, necesitas determinar la probabilidad de que ocurra un evento. Para ello, debes saber interpretar los datos del enunciado y definir los eventos más apropiados que te permitirán responder correctamente la pregunta, tal como se hizo en la Estrategia 1.

Otra forma que tienes para enfrentar la pregunta es organizar los datos a través de una representación como la tabla planteada en la Estrategia 2, en la que se visualiza la probabilidad de obtener cada número al lanzar un dado cargado.

En ambos casos se necesita haber desarrollado habilidades de Resolver problemas y de Representar.

PREGUNTA 59

En la tabla adjunta se muestra la distribución de los puntajes obtenidos por todos los estudiantes de un curso en una prueba.

Puntaje	Frecuencia
10	2
20	4
30	10
40	8
50	14
60	4
70	3

Si se selecciona al azar un estudiante de este curso, ¿cuál es la probabilidad de que este tenga a lo menos 40 puntos?

A) $\frac{8}{45}$

B) $\frac{16}{45}$

C) $\frac{24}{45}$

D) $\frac{29}{45}$

Estrategia de resolución

Para calcular la probabilidad de que se seleccione al azar un estudiante que haya obtenido a lo menos 40 puntos en la prueba, tienes que usar la regla de Laplace. Esto significa que debes dividir la cantidad de estudiantes con a lo menos 40 puntos por la cantidad total de estudiantes.

Para calcular las cantidades necesarias tienes que utilizar los datos de la tabla dada, como se muestra a continuación:

Puntos	Frecuencia
10	2
20	4
30	10
40	8
50	14
60	4
70	3

La cantidad total de personas es $2+4+10+8+14+4+3=45$

La cantidad de personas con a lo menos 40 puntos es $8+14+4+3=29$

Así, la probabilidad pedida es $\dfrac{29}{45}$, la cual se encuentra en la opción D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para resolver este problema, debes recordar la regla de Laplace de las probabilidades y ser capaz de extraer información de una tabla, por lo que debes de haber desarrollado la habilidad de Representar. Además, es fundamental la interpretación que hagas de la condición planteada en la pregunta, pues es lo que te permite determinar las frecuencias que necesitas sumar para calcular los casos favorables en la determinación de la probabilidad pedida.

PREGUNTA 60

En un mazo de cartas de naipe inglés (52 cartas), 13 de ellas son de trébol. Si se extraen del mazo dos cartas al azar, una después de la otra y sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean de trébol?

A) $\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}$

B) $\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{52}$

C) $\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52}$

D) $\frac{13}{52} + \frac{13}{52}$

E) $\frac{13}{52} + \frac{12}{51}$

Estrategia de resolución

Para calcular la probabilidad de que dos cartas elegidas al azar del mazo sean de trébol tienes que usar la regla multiplicativa de las probabilidades. Así, dicha probabilidad la puedes calcular como el producto entre la probabilidad de sacar un trébol en la primera extracción y la probabilidad de sacar un trébol en la segunda extracción.

La probabilidad de sacar un trébol en la primera extracción la puedes calcular usando la regla de Laplace:

$$\frac{\text{cantidad de tréboles en la baraja}}{\text{cantidad total de cartas en la baraja}} = \frac{13}{52}$$

La probabilidad de sacar un trébol en la segunda extracción si en la primera salió un trébol, y esta carta no se repuso en el mazo, es:

$$\frac{\text{cantidad de tréboles en la baraja luego de la primera extracción}}{\text{cantidad total de cartas en la baraja luego de la primera extracción}} = \frac{12}{51}$$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es $\frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}$.

La respuesta correcta es la opción A).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responder esta pregunta, debes comprender la información que se presenta en el enunciado, esto es, que en el experimento de sacar dos cartas de un mazo puedas determinar la probabilidad de que sean de la misma pinta.

Luego, podrías determinar la probabilidad pedida aplicando la regla multiplicativa de las probabilidades, siendo fundamental la capacidad que debes tener para reconocer la cantidad de casos favorables y totales involucrados en cada una de las probabilidades que se deben multiplicar. Esto solo lo puedes hacer al interpretar correctamente el significado de sin reposición de la carta extraída en la primera selección del mazo, lo que implica descontarla en la contabilización de los casos favorables y totales en la segunda extracción.

PREGUNTA 61

Un estudiante contesta una prueba en que cada pregunta tiene 5 opciones y solo una de ellas es la correcta.

Si responde las 3 últimas preguntas al azar y de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de tener estas 3 respuestas correctas?

A) $\frac{3}{5}$

B) $\frac{3}{15}$

C) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$

D) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$

E) $3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3$

Estrategia de resolución

Para resolver este problema, tienes que comprender e interpretar los datos dados en el enunciado y así determinar la probabilidad de que un estudiante responda correctamente las tres últimas preguntas de la prueba al azar.

Como cada pregunta tiene 5 opciones, de las cuales solo una de ellas es la correcta, puedes aplicar Laplace para determinar la probabilidad de contestar correctamente una pregunta al azar de la siguiente manera:

$$\frac{\text{cantidad de opciones correctas}}{\text{cantidad total de opciones}} = \frac{1}{5}$$

Ahora, como se pide la probabilidad de tener tres respuestas correctas, al contestarlas al azar, puedes aplicar la regla multiplicativa de las probabilidades, donde obtienes $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$.

La respuesta correcta es la opción D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

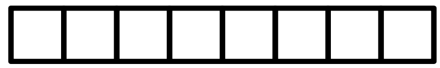
Para responderla correctamente, debes saber que cada una de las cinco opciones de una pregunta tiene la misma probabilidad de ser elegida cuando esta elección se hace al azar, es decir, un quinto.

Luego, debes determinar la probabilidad pedida aplicando la regla multiplicativa de las probabilidades representando el resultado a través de una expresión que utiliza potencias.

Así, las habilidades requeridas para encontrar la solución a la situación problemática planteada son las de Representar y de Resolver problemas.

PREGUNTA 62

Una persona dispone de 12 lápices de distintos colores para dibujar un adorno que pegará en un muro. Este adorno estará formado por ocho cuadrados, como el que se representa en la siguiente figura:



Cada cuadrado debe ser pintado con alguno de los lápices y dos cuadrados seguidos no pueden ser pintados del mismo color.

¿Cuántos adornos distintos con las características antes mencionadas se pueden formar?

A) $8 \cdot 12$

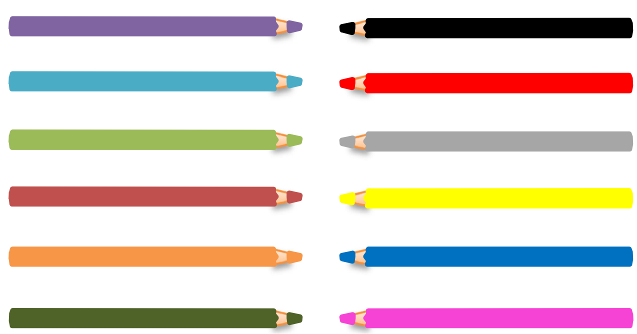
B) 11^8

C) 12^8

D) $12 \cdot 11^7$

Estrategia de resolución

Como en el enunciado se dice que se dispone de 12 lápices de colores para realizar un adorno para pegar en un muro, podrían ser los siguientes colores:



Como este adorno está formado por ocho cuadrados y dos cuadrados seguidos no pueden ser pintados del mismo color, podrías tener alguno de los siguientes ejemplos:

Sería impracticable colocar todos los ejemplos que se pueden dar para contarlos uno a uno, pues son muchos los casos. Por lo que es conveniente usar un esquema que represente la cantidad de casos que se pueden dar, como se muestra a continuación:

Así, en el esquema puedes ver que en la primera posición se podría usar cualquiera de los 12 colores disponibles, pero en la segunda posición solo 11, porque no puede ser de igual color que el elegido para la primera posición. En la tercera posición no se puede usar el anterior, pero sí se puede usar el color que se puso en la primera posición, por ello son 11 posibilidades nuevamente, y esto se repite para el resto de las posiciones.

Lo anterior lo puedes escribir como $12 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 = 12 \cdot 11^7$, que es la cantidad de adornos distintos que se podrían formar con las características planteadas en el problema.

La respuesta correcta es la opción D).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para responder esta pregunta, debes comprender los datos que te dan en el enunciado y así buscar la estrategia de resolución que más te acomode. En la estrategia presentada se utiliza un esquema de tal manera que puedas visualizar la cantidad de colores que se pueden usar para pintar cada uno de los ocho cuadrados que conforman el adorno según la condición dada en el enunciado. Luego, a partir de este esquema tienes que reconocer el principio que debes usar para encontrar la cantidad total de adornos que podrías formar. En este caso, el principio multiplicativo.

Así, necesitas haber desarrollado las habilidades de Resolver problemas y de Representar para enfrentar esta pregunta.

PREGUNTA 63

¿Cuántas palabras de 4 letras en total, con sentido y sin él, se pueden formar con las letras de la palabra CUADERNO, si las letras no se pueden repetir?

A) 32

B) $8!$

C) $4!$

D) 70

E) 1.680

Estrategias de resolución

Estrategia 1: usar el principio multiplicativo.

Para resolver este problema, lo primero que debes hacer es comprender que con las letras de la palabra CUADERNO puedes formar palabras de 4 letras con sentido y sin él, y sin que las letras se repitan, por ejemplo, CUAD o DRCE. También tienes que comprender que dos palabras con las mismas letras, pero en otro orden, son distintas, por ejemplo, ERNO y NORE.

Para formar la palabra con las características solicitadas en el problema, tienes 8 posibilidades para elegir la primera letra; para la segunda tienes 7 posibilidades, porque las letras no se pueden repetir; para la tercera letra tienes 6 posibilidades y para la última tienes 5 posibilidades.

Luego, para formar palabras de 4 letras con sentido y sin él y sin que se repitan las letras, tienes $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1.680$ posibilidades.

La respuesta correcta es la opción E).

Estrategia 2: usar arreglo.

Para responder cuántas palabras de 4 letras en total puedes formar con las letras de la palabra CUADERNO, en que las palabras pueden tener sentido o no y las letras no se pueden repetir, tienes que entender que esto es equivalente a preguntar cuántas palabras de 4 letras distintas se pueden formar con las letras C, U, A, D, E, R, N, O; por ejemplo, la palabra CUDR.

También, debes notar que como se trata de palabras, dos palabras con las mismas 4 letras, en distinto orden, se consideran dos palabras distintas. Por ejemplo, la palabra CUDR es distinta a la palabra URDC. Por lo tanto, puedes usar la fórmula de arreglos para contar el total de palabras de n letras que se pueden formar con m letras disponibles, que es $\dfrac{m!}{(m-n)!}$.

Por todo lo anterior, la cantidad de palabras de 4 letras en total que puedes formar con las 8 letras de la palabra CUADERNO es $\dfrac{8!}{(8-4)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1.680$.

La respuesta correcta es la opción E).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

En esta pregunta es fundamental la interpretación que realices de la información entregada en el problema, especialmente del significado de palabras con sentido y sin él, lo que te lleva a deducir que importa el orden en que se colocan las letras en la palabra que se quiere formar. Además, debes considerar el hecho de que las letras no se pueden repetir.

A partir de lo antes mencionado, tienes más de un camino para realizar el conteo de palabras que se pueden formar. Por un lado, puedes aplicar el principio multiplicativo, determinando la cantidad de posibilidades que tienes para escoger la letra que ocupará cada una de las posiciones de la palabra, como se realizó en la Estrategia 1.

Por otro lado, puedes usar la fórmula de arreglos, identificando las cantidades correctas que debes reemplazar en dicha fórmula, como se hizo en la Estrategia 2.

Las habilidades que debes poner en juego para responder esta pregunta son la de Resolver problemas y de Modelar.

PREGUNTA 64

Jacinta tiene 8 libros de matemática, 7 de literatura y 10 de biología.

¿De cuántas maneras puede escoger 2 libros de cada disciplina para llevarlos al colegio?

A) $\binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\binom{10}{2}$

B) $\binom{8}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{10}{2}$

C) $\binom{25}{2}\cdot\binom{24}{2}\cdot\binom{23}{2}$

D) $\dfrac{25!}{19!}$

E) $\dfrac{8!}{2!}\cdot\dfrac{7!}{2!}\cdot\dfrac{10!}{2!}$

Estrategia de resolución

Para determinar la cantidad de maneras que tiene Jacinta para escoger 2 libros de cada una de las 3 disciplinas, tienes que calcular, en primer lugar, la cantidad de grupos de 2 libros distintos que puede seleccionar de cada una.

Como al escoger 2 libros de una disciplina no importa en qué orden se elijan, para realizar el cálculo tienes que usar combinatoria, como te puedes dar cuenta en la siguiente tabla:

	Matemática	Literatura	Biología
Cantidad de maneras que se pueden escoger 2 libros	$\binom{8}{2}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{10}{2}$

Como Jacinta quiere escoger 2 libros de matemática, 2 libros de literatura y 2 libros biología, tienes que usar el principio multiplicativo. Por ello, obtienes $\binom{8}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{10}{2}$.

La respuesta correcta es la opción B).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

Para calcular de cuántas maneras se pueden escoger dos libros de cada disciplina tienes que interpretar la situación dada en el enunciado como un producto de combinatorias y notar que en la elección no importa el orden.

En este problema solo debes representar la solución a través de una expresión matemática sin necesidad de que realices cálculos numéricos. Por lo que solo requieres interpretar bien la información planteada en el enunciado para asociarla a la técnica de conteo apropiada.

PREGUNTA 65

En la siguiente tabla se muestra información sobre una muestra de datos, tal que M es un número real.

Intervalo	Frecuencia
$[M - 20, M - 10[$	N
$[M - 10, M[$	$N + 1$
$[M, M + 10[$	$N - 1$
$[M + 10, M + 20[$	N

Se puede determinar el valor exacto de M si:

(1) se sabe que $M = N$.

(2) se conoce la frecuencia del intervalo de mayor frecuencia.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Estrategia de resolución

Para responder esta pregunta, tienes que verificar qué información, dada en (1) y/o en (2), es necesaria y suficiente para determinar el valor de M.

Así, en la información dada en (1) se dice que que $M = N$, luego al reemplazarlo en la tabla obtienes:

Intervalo	Frecuencia
$[N - 20, N - 10[$	N
$[N - 10, N[$	$N + 1$
$[N, N + 10[$	$N - 1$
$[N + 10, N + 20[$	N

Luego, de la tabla no puedes conocer el valor de N al desconocer, por ejemplo, la frecuencia total de la distribución y, por ende, tampoco puedes conocer el valor de M. Por lo que la información dada en (1) no es suficiente para responder la pregunta.

Por otro lado, en (2) se conoce la frecuencia del intervalo de mayor frecuencia, el cual es un número entero positivo, por lo que conocerías el valor de $N + 1$, pues $N + 1$ es siempre mayor que N y que $N - 1$, ya que N es un número entero positivo al ser una frecuencia. Por lo tanto, conocerías el valor de N, pues basta restarle 1 al valor de $N + 1$. Sin embargo, con dicha información no puedes conocer el valor de M, pues esta frecuencia no tiene relación con los valores de los intervalos. Entonces, la información dada en (2) no es suficiente para encontrar el valor exacto de M.

Ahora bien, si consideras la información dada en (1) y (2) simultáneamente, sí puedes conocer el valor de M, pues con (2) conoces el valor de N y por (1) $M = N$.

La respuesta correcta es la opción C).

¿Qué necesitas saber y saber hacer para responder correctamente esta pregunta?

En esta pregunta debes saber interpretar una tabla de frecuencia, en la cual tienes que relacionar cada una de las informaciones dadas en (1) y/o en (2) para encontrar los valores de las componentes de esta tabla. Debes saber el significado de mayor frecuencia y, además, debes interpretar expresiones algebraicas y relacionarlas con orden en los números enteros.

En esta pregunta tienes que poner en juego tu habilidad de evaluar condiciones que sirvan para responder una pregunta sin encontrar la solución exacta.

DEMRE

PIONEROS • EXPERTOS • CONFIABLES

PROCESO de ADMISIÓN 2023

demre.cl

/demre.uchile

/demre_uchile

/DEMREuchile

/demre.uchile